Examen DATA (1 heure)

Nom : **Prénom :** **Classe :**

Cet examen contient 3 exercices. Le barème donné est sur 20.

Exercice 1 : formes bilinéaires (6 points)

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, considérons les deux formes bilinéaires φ_A et φ_B définies dans la base canonique par les deux matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Ainsi pour tout $u = (x_1, y_1, z_1) \in E$ et pour tout $v = (x_2, y_2, z_2) \in E$,

$$\varphi_A(u,v) = {}^tX_1 A X_2 \quad \text{et} \quad \varphi_B(u,v) = {}^tX_1 B X_2$$

où X_1 et X_2 sont les matrices colonnes constituées des coordonnées de u et de v dans la base canonique de E.
Les diagonalisations des deux matrices A et B, effectuées sur Octave, conduisent aux matrices P_A, D_A, P_B et D_B suivantes :

```
>> [PA,DA] = eig(A)
PA =

  -6.0591e-01  -7.0711e-01  -3.6451e-01
   5.1550e-01  -1.9429e-16  -8.5689e-01
   6.0591e-01  -7.0711e-01   3.6451e-01

DA =

Diagonal Matrix

  -1.7016         0         0
        0    2.0000         0
        0         0    4.7016
```

et

```
>> [PB,DB] = eig(B)
PB =

   0.5279   0.6914   0.4932
  -0.7591   0.1237   0.6392
   0.3809  -0.7118   0.5901

DB =

Diagonal Matrix

   0.4080        0        0
        0   3.5072        0
        0        0   9.0848
```

1. Soit $(u,v) \in E^2$. Notons X_1' et X_2' les matrices colonnes constituées des coordonnées de u et de v dans la base propre de A. Exprimer $\varphi_A(u,v)$ en fonction de X_1' et X_2'.

2. La forme bilinéaire φ_A est-elle un produit scalaire sur E ? Justifier.

3. La forme bilinéaire φ_B est-elle un produit scalaire sur E ? Justifier.

Exercice 2 : projection orthogonale (7 points)

On cherche la meilleure solution, au sens des moindres carrés, au système

$$(S) : \begin{cases} x + 2y &= 1 \\ -x + 2y &= -1 \\ x + 2y &= -4 \\ 3x &= 8 \end{cases}$$

Pour trouver cette meilleure solution, on calcule la projection orthogonale d'un certain vecteur u sur un certain sev F.

1. Préciser u et F. Pour cela, donner la valeur de u et exprimer F sous forme de sev engendré (en utilisant la notation Vect).

2. On trouve alors le résultat suivant (entourer la bonne réponse) :

   $(x, y) = (2, -1)$ $\qquad$ $(x, y) = (1, 2)$ $\qquad$ Aucun de ces choix

3. Justifier votre choix de réponse à la question 2.

Exercice 3 : régression linéaire (7 points)

Considérons un jeu de données constitué de n observations ($n \in \mathbb{N}^*$) de trois variables aléatoires X, Y et Z. On a calculé les valeurs suivantes :

$\hat{\mathrm{E}}(X) = 100$	$\hat{\mathrm{E}}(Y) = 150$	$\hat{\mathrm{E}}(Z) = 50$
$\widehat{\mathrm{Var}}(X) = 64$	$\widehat{\mathrm{Var}}(Y) = 49$	$\widehat{\mathrm{Var}}(Z) = 81$

De plus : $\widehat{\mathrm{Cov}}(X, Z) = -40$ et $\widehat{\mathrm{Cov}}(Y, Z) = 18$

On construit trois modèles de Z :

- Modèle 1 : de la forme $Z = b_1 \mathbb{1}$
- Modèle 2 : de la forme $Z = a_2 X + b_2 \mathbb{1}$
- Modèle 3 : de la forme $Z = a_3 Y + b_3 \mathbb{1}$

On suppose que pour chaque modèle i ($i = 1$, 2 ou 3), les paramètres a_i et b_i ont été calculés pour obtenir la plus faible erreur quadratique moyenne (EQM).

1. Quel est la valeur b_1 du modèle 1 obtenu ?

2. Que vaut l'EQM de ce modèle 1 ?

3. Calculer les coefficients de corrélations empiriques $\hat{\mathrm{r}}(X, Z)$ et $\hat{\mathrm{r}}(Y, Z)$.

4. Lequel des modèles 1, 2 ou 3 permet d'obtenir la plus faible EQM ? Expliquer votre réponse.