Contrôle de cours 2 (1 heure)

Nom : **Prénom :** **Classe :**

N.B. : le barème est sur 20.

1 Probabilités

Exercice 1 (5 points)

Considérons une variable aléatoire entière infinie X dont la loi est donnée par :

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, P(X{=}n) = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

1. Vérifier par le calcul que $\sum_{n=1}^{+\infty} P(X{=}n) = 1$.

....
....
....
....
....
....

2. Déterminer sa fonction génératrice $G_X(t)$. On l'exprimera d'abord sous la forme d'une série entière, puis à l'aide des fonctions usuelles.

....
....
....
....
....
....

3. Calculer l'espérance et la variance de X.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

2 Familles de vecteurs, base et dimension d'une espace vectoriel

Exercice 2 (8 points)

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{F} = (u_1, \cdots, u_n)$ une famille de E.

1. Écrire la définition de : «$\mathcal{F}$ est une famille libre».

 ....

2. Écrire la définition de : «$\mathcal{F}$ est une famille liée».

 ....

3. Écrire la définition de : «$\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E».

 ....

4. Dans cette question, on suppose que $n = 3$, c'est-à-dire $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$, et de plus que $u_1 - 2u_2 + 3u_3 = 0_E$. Montrer que Vect $\mathcal{F}$ = Vect (u_1, u_3).

 ....
 ....
 ....
 ....
 ....
 ....
 ....
 ....
 ....
 ....

5. Application : dans $E = \mathbb{R}^3$, considérons la famille $\mathcal{F} = \big(u_1 = (1, -1, 1), u_2 = (5, 1, 1), u_3 = (1, 2, -1)\big)$.

 (a) La famille $\mathcal{F}$ est-elle libre ? Justifier votre réponse.

 ....
 ....
 ....
 ....
 ....
 ....
 ....
 ....
 ....
 ....
 ....
 ....

 (b) Donner une base de Vect $\mathcal{F}$ et en déduire sa dimension.

 ....
 ....
 ....

Une démonstration de cours (3 points)

Soient E un $\mathbb{R}$-ev, F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimensions finies n et p, $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de F et $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$ une base de G.
On considère la famille $\mathcal{F} = (e_1, \cdots, e_n, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$ obtenue par concaténation des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Montrer que :

$$\mathcal{F} \text{ libre} \Longrightarrow F \cap G = \{0_E\}$$

3 Applications linéaires

Exercice 3 (4 points)

1. Donner un exemple d'application $f : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ qui n'est pas linéaire. Justifier soigneusement votre réponse.

2. Soient E et F deux $\mathbb{R}$-ev et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Donner les définitions mathématiques de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

3. Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (3x, x - 2y + z) \end{array} \right.$. Trouver une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et en déduire sa dimension.