Contrôle de cours 2 (1 heure)

Nom : Prénom : Classe :

N.B. : le sujet contient **4 pages** et 4 exercices.

Exercice 1 : probabilités (4 points)

Soient $p \in]0,1[$ et X une variable aléatoire qui suit une loi géométrique de paramètre p : $X \rightsquigarrow \text{Géom}(p)$.

1. Donner la loi de X.

   ....
   ....
   ....

2. Déterminer sa fonction génératrice $G_X(t)$ en l'exprimant d'abord sous la forme d'une série entière, puis à l'aide des fonctions usuelles. Justifier.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

3. Calculer l'espérance et la variance de X.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

Exercice 2 : famille de vecteurs (6 points)

Dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on considère la famille $\mathcal{F} = \left(A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$.

1. Écrire la définition, dans ce contexte et avec les quantificateurs, de « $\mathcal{F}$ est libre ».

   ....
   ....

2. Cette famille $\mathcal{F}$ est-elle libre ? Justifier.

3. Écrire la définition, dans ce contexte et avec les quantificateurs, de « $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E ».

4. $\mathcal{F}$ est-elle une famille génératrice de E ? Justifier.

5. $\mathcal{F}$ est-elle une base de E ? Si oui, donner les coordonnées de $U = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ dans cette base. Si non, donner $\dim(\mathrm{Vect}\ \mathcal{F})$. Ne détaillez vos calculs, mais justifiez ce que vous affirmez.

Exercice 3 : applications linéaires (6 points)

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-ev et $f \in \mathcal{L}(E, F)$

1. Donner la définition mathématique (avec les quantificateurs) de $\mathrm{Ker}(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\mathrm{Ker}(f)$ et/ou $\mathrm{Im}(f)$ pour « f surjective ».

3. Donner et démontrer une condition nécessaire et suffisante sur $\mathrm{Ker}(f)$ et/ou $\mathrm{Im}(f)$ pour « f injective ». On prendra soin de **démontrer** que cette condition est bien nécessaire et suffisante.

4. Donner un exemple d'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ qui soit injective et telle que $(1, -1, 1) \in \mathrm{Im}(f)$. On ne vous demande pas de démontrer que ces propriétés sont vérifiées.

Exercice 4 : déterminant (4 points)

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Pour les propriétés suivantes, indiquez si elles sont vraies ou fausses. Inutile de justifier.

   (a) Pour tout $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $\det(A+B) = \det(A)+\det(B)$. ....

   (b) Pour tout $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. ....

   (c) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\det(\lambda A) = \lambda \det(A)$. ....

   (d) $\det(A) = \det\left(\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\right)$. ....

   (e) $\det(A) = \det\left(\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\right)$. ....

2. Calculer le déterminant de A.

   ....
   ....
   ....

3. La matrice A est-elle inversible ? Justifiez.

   ....
   ....