Contrôle TD 2

Nom : Prénom : Classe :

Exercice 1 (3 points)

Soit X une variable aléatoire entière de fonction génératrice $G_X(t) = e^{-2}\, t\, e^{2t}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Que vaut $P(X=n)$?

$G_X(t) = e^{-2} t \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2t)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-2} 2^n t^{n+1}}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-2} 2^{n-1} t^n}{(n-1)!}$

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $P(X=n) = \frac{e^{-2} 2^{n-1}}{(n-1)!}$

2. Déterminer l'espérance et la variance de X.

- $G_X'(t) = e^{-2}\left(e^{2t} + 2te^{2t}\right) = e^{-2} e^{2t}(1+2t)$
- $G_X''(t) = e^{-2}\left(2e^{2t}(1+2t) + e^{2t} \times 2\right) = e^{-2} e^{2t}(4+4t)$

D'où $E(X) = G_X'(1) = e^{-2} e^{2} \times 3 = 3$

et $V(X) = G_X''(1) + G_X'(1) - (G_X'(1))^2$
$= e^{-2} e^{2} \times 8 + 3 - 9 = 2$

Exercice 2 (3,5 points)

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, on considère la famille $\mathcal{F} = \{\overbrace{(1,2,1)}^{u_1}, \overbrace{(1,1,2)}^{v}\ \overbrace{(1,2,-1)}^{w}\}$.

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de E.

- Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tq $\alpha u_1 + \beta v + \gamma w = 0_{\mathbb{R}^3}$.

Alors $\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta - \gamma = 0 \end{cases}$ $\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\Longrightarrow}$ $\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ -\beta = 0 \\ \beta - 2\gamma = 0 \end{cases}$

D'où $(\alpha, \beta, \gamma) = (0,0,0)$. On en déduit $\mathcal{F}$ libre

- Or Card $\mathcal{F} = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ donc $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$

2. Soit $u = (1, -1, 2)$. Déterminer les coordonnées de u dans la base $\mathcal{F}$.

On cherche $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tq $\alpha u_1 + \beta v + \gamma w = (1, -1, 2)$

On a $\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ 2\alpha + \beta + 2\gamma = -1 \\ \alpha + 2\beta - \gamma = 2 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ -\beta = -3 & L_2 \leftarrow L_2 - 2 \\ \beta - 2\gamma = 1 & L_3 \leftarrow L_3 - L \end{cases}$

Ainsi $\beta = 3$, $\gamma = 1$ et $\alpha = -3$.

CCl $[u]_{\mathcal{F}} = \mathrm{Coord}_{\mathcal{F}}(u) = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. Notons $\mathcal{B}$ la base canonique de E. Soit un vecteur quelconque $u = (x, y, z) \in E$. On note X et X' les matrices colonnes constituées de ses coordonnées dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{F}$.
Que vaut la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{F}$? Écrire la relation matricielle liant X et X' à l'aide de cette matrice.

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u_1 & v & w \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} (1,0,0) \\ (0,1,0) \\ (0,0,1) \end{array}$$

$X = PX' \iff X' = P^{-1}X$

Exercice 3 (2 points)

Soit l'application linéaire $f : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ P & \longmapsto & \begin{pmatrix} P(1) & P(2) \\ P'(1) & P'(2) \end{pmatrix} \end{cases}$

Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques au départ et à l'arrivée.

$f(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $f(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $f(X^2) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(1) & f(X) & f(X^2) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Exercice 4 (1,5 points)

Soit la famille $\mathcal{F} = \{(1, -2, 1), (1, 0, 1), (-2, 4, -2)\}$. Donner une base de Vect $\mathcal{F}$.

On a $(-2, 4, -2) = -2(1, -2, 1)$.

Ainsi $\mathrm{Vect}\,\mathcal{F} = \mathrm{Vect}(\{(1,-2,1), (1,0,1)\})$

~~Comme~~ Posons $u = (1,-2,1)$ et $v = (1,0,1)$. $\{u, v\}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Vect}\,\mathcal{F}$. Or u et v ne sont pas colinéaires d'où $\{u, v\}$ est libre.

CCl $\{u, v\}$ base de $\mathrm{Vect}\,\mathcal{F}$.