Contrôle blanc

Exercice 1

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $\dfrac{\ln\big(1-\sin(2x)\big)}{1-x}$
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n\left(\sqrt{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}-1\right)}{\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)}$

Exercice 2

1. En utilisant le critère de d'Alembert, déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum \frac{\mathrm{e}^{n^\alpha}}{n!}$ en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}$
2. En utilisant le critère de Leibniz pour les séries alternées, déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum (-1)^n \frac{n+1}{n\ln(n)}$
3. En utilisant le critère de Cauchy, déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum \frac{n^\alpha}{\alpha^n}$ en fonction de $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$
4. À l'aide d'un développement limité, déterminer en fonction de $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ la nature de la série
$$\sum \left(\sqrt[3]{n^3+\alpha n} - \sqrt{n^2+\beta}\right)$$

Exercice 3

L'objectif de cet exercice est de calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.

On pose $v_n = \ln(n) - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, et $u_n = \ln\left(\dfrac{n}{n-1}\right) - \dfrac{1}{n}$ pour $n \geqslant 2$.

1. Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{n}$.
2. À l'aide d'un développement limité, déterminer la nature de la série $\sum u_n$.
3. Exprimer la somme partielle $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} u_k$. En déduire la nature de (v_n).
4. En déduire : $\exists \gamma \in \mathbb{R}, \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$.
5. En utilisant la formule précédente, déterminer $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$.
(indice : si l'on note T_n la somme partielle de cette série, exprimer T_{2n} en fonction de v_n et v_{2n})

Exercice 4

On souhaite déterminer la nature des séries $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt[\alpha]{n}}\right)$ et $\sum \sin\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt[\alpha]{n}}\right)$ en fonction de $\alpha \in \mathbb{N}^*$.

1. Les termes généraux de ces deux séries sont équivalents à $\frac{(-1)^n}{\sqrt[\alpha]{n}}$. Rappeler la nature de $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt[\alpha]{n}}$. Pourquoi ne peut-on rien conclure sur la nature des deux séries étudiées ?
2. Étude de $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt[\alpha]{n}}\right)$.
   (a) Écrire le développement asymptotique à l'ordre 2 en $\frac{1}{\sqrt[\alpha]{n}}$ de $\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt[\alpha]{n}}\right)$.
   (b) En déduire la nature de $\sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt[\alpha]{n}}\right)$ en fonction de α.
3. Étude de $\sum \sin\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt[\alpha]{n}}\right)$.
   (a) Écrire la formule (générale) de développement limité au rang $2k+1$ de $\sin\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt[\alpha]{n}}\right)$.
   Pourquoi ne peut-on pas utiliser la même méthode que dans le calcul précédent ? (i.e. pourquoi les $(-1)^n$ ne disparaissent-ils jamais ?)
   (b) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n^{(2k+1)/\alpha}}$ est convergente.
   Que dire de plus si $2k+1 > \alpha$?
   (c) Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $2k+1 > \alpha$.
   En examinant le développement limité de $\sin\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt[\alpha]{n}}\right)$ à l'ordre $2k+1$, conclure sur la nature de la série étudiée.
   (indice : montrer que la série est somme de $k+1$ séries alternées convergentes et d'une série absolument convergente.)