Contrôle de cours 1 (1 heure)

Nom : **Prénom :** **Classe :**

N.B. : le barème est sur 20.

1 Comparaisons de suites

Exercice 1 (4 points)

1. Considérons deux suites (u_n) et (v_n) telles que, au voisinage de $+\infty$, $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $v_n = o\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

   Pour chacune des suites (w_n) suivantes, expliquer si les hypothèses permettent de trouver $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $w_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$. En cas de réponse positive, donner la plus grande valeur possible de α. Justifier.

   (a) $w_n = u_n - v_n$

   ....
   ....
   ....

   (b) $w_n = u_n \times v_n$

   ....
   ....
   ....

2. Soit une suite (u_n) admettant en $+\infty$ le développement limité à l'ordre 2 : $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

   (a) Cette expression permet-elle de déterminer un développement limité à l'ordre 3 de u_n^2 ? Si oui, donner ce DL. Si non, justifier.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

   (b) Cette expression permet-elle de déterminer un développement limité à l'ordre 3 de $(1+u_n)^2$? Si oui, donner ce DL. Si non, justifier.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

Exercice 2 (2 points)

Soient deux suites (u_n) et (v_n) strictement positives telles que $u_n \sim v_n$. Dire si les relations suivantes sont vraies ou non.

(a) $1 + u_n \sim 1 + v_n$: .... (b) $\sqrt{u_n} \sim \sqrt{v_n}$: .... (c) $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$: .... (d) $e^{u_n} \sim e^{v_n}$: ....

2 Séries numériques

Exercice 3 (3 points)

Déterminer la nature de $\sum \left(\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \right)$.

....
....
....
....
....
....
....
....

Question de cours (3 points)

1. Énoncer la règle de d'Alembert pour les séries numériques.

   ....
   ....
   ....
   ....

2. Donner une exemple d'une suite (u_n) strictement positive vérifiant à la fois

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \qquad \text{et} \qquad \sum u_n \text{ diverge}$$

   ....
   ....
   ....
   ....

Question de cours avec démonstration (5 points)

Considérons une suite (u_n) telle que $\sum |u_n|$ converge.

1. Que peut-on dire de $\sum u_n$?

   ....
   ....
   ....

2. Démontrer cette propriété.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

3. Étudier la nature de $\sum \frac{\sin(n)}{n^2}$.

3 Probabilités

3.1 Exercice 4 (3 points)

Considérons deux variables aléatoires indépendantes X et Y, prenant leurs valeurs dans $\{0,1\}$ et telles que

$$P(X=1) = \frac{1}{3}, \quad P(X=0) = \frac{2}{3}, \quad P(Y=1) = \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad P(Y=0) = \frac{1}{4}$$

1. Exprimer les fonctions génératrices $G_X(t)$ et $G_Y(t)$ de ces deux variables.

2. Expliquer (sans faire les calculs finaux) comment ces deux fonctions permettent d'obtenir :
   (a) L'espérance de X

   (b) La variance de X

   (c) La fonction génératrice de la variable $Z = X + Y$