Proposition de correction du Contrôle TD 1

Question de cours

Soit (u_n) une suite réelle strictement positive telle que

$\sqrt[n]{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ où $l \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$

Alors

$$\begin{cases} l < 1 \implies \sum(u_n) \text{ converge} \\ l > 1 \implies \sum(u_n) \text{ diverge} \end{cases}$$

Exercice 1

Question 1

On a:

$$\begin{aligned} f(x) &= ln\left(1 + sin\left(x\right)\right) \\ &= ln\left(1 + x + o(x^2)\right) \\ &= x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \end{aligned}$$

Question 2

On a:

$$\begin{aligned} u_n &= ln\left(1 + sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{n} \text{ car } \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\ &= -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Ainsi on a $u_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$

$u_n < 0$ donc les théorèmes s'appliquent

$\sum(u_n)$ et $\sum(-\frac{1}{2n^2})$ sont de même nature

Or $\sum(-\frac{1}{2n^2})$ converge (Riemann avec $\alpha = 2 > 1$)

Ccl: $\sum(u_n)$ converge

Exercice 2

Soit (u_n) une suite réelle positive telle que : $u_n = \frac{(2n)!}{(n!)^3} > 0$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^3} \cdot \frac{(n!)^3}{(2n!)} \\
&= \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^3} \\
&= \frac{2(2n+1)}{(n+1)^2}
\end{aligned}$$

$\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2 \cdot 2n}{n^2} = \frac{4}{n} \implies lim \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0 \quad (< 1)$

Ainsi, par d'Alembert, $\sum u_n$ converge

Exercice 3

Question 1

Posons $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

La suite (a_n) est décroissante car la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante

Ainsi $a_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

Par le CSSA, $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge

Question 2

On pose $u_n = v_n + w_n$ avec $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $w_n = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

$\sum v_n$ converge d'après la question 1

$w_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ Ainsi $w_n > 0$

Or $\sum \frac{1}{n}$ diverge d'où $\sum w_n$ diverge

<u>Ccl:</u> $\sum u_n$ diverge