Examen de rattrapage Maths S3 (2 heures)

Nom : **Prénom :** **Classe :**

Documents et calculatrice interdits. Le barème est sur 40. Note : /20

Exercice 1 : séries numériques (8 points)

1. Déterminer la nature de la série $\sum \frac{e^{1/n}}{n^2}$.

2. Déterminer la nature de la série $\sum \frac{e^n}{(2n)!}$.

3. Soit $a > 0$. Considérons la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n^a + (-1)^n}$ (défini pour $n \geqslant 2$).

   (a) Trouver $k \in \mathbb{R}$ tel que $u_n = \frac{(-1)^n}{n^a} + \frac{k}{n^{2a}} + o\left(\frac{1}{n^{2a}}\right)$.

(b) Discuter la nature de $\sum u_n$ en fonction de la valeur de $a > 0$.

Exercice 2 : séries entières (8 points)

Considérons la série entière $\sum(-2)^n x^n$.

1. Déterminer son rayon de convergence R.

2. Soit $x \in]-R, R[$ fixé. Donner une expression simple de la somme partielle de la série numérique $\sum(-2)^n x^n$.

3. Trouver une expression simple, à l'aide des fonctions usuelles, de la fonction définie pour tout $x \in]-R, R[$ par : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-2)^n x^n$.

4. En déduire une expression de $g : x \longmapsto \dfrac{1}{(2x+1)^2}$ sous la forme d'une série entière.

Exercice 3 : probabilités (8 points)

Sur le site www.promo2027.com, on a observé que le nombre de connexions est en moyenne de 10 par heure. Pour chaque heure h à venir, on définit la variable aléatoire X_h = « nombre de connexions pendant cette heure h ».
On suppose que X_h suit une loi de Poisson, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda > 0$ tel que :

$$X_h(\Omega) = \mathbb{N} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X_h{=}n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$$

De plus, les variables X_h sont supposées indépendantes deux à deux et de même loi.

1. Déterminer la fonction génératrice $G_{X_h}(t)$ de X_h.

2. Calculer l'espérance et la variance de X_h.

3. Compte tenu des données observées, que vaut λ ?

4. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de connexions sur une journée entière.
   (a) En écrivant Y comme une somme de variables aléatoires, déterminer sa fonction génératrice $G_Y(t)$.

(b) En déduire $P(Y{=}0)$ et $P(Y{=}1)$.

....
....
....
....

Exercice 4 : construction d'un projecteur (8 points)

Dans $E = \mathbb{R}^2$, considérons les sev $F = \{(x, y) \in E, x + y = 0\}$ et $G = \{(x, y) \in E, x - 2y = 0\}$.

1. Trouver une base $\mathcal{B}_1$ de F et une base $\mathcal{B}_2$ de G.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

2. On admet que $E = F \oplus G$. Ainsi, pour tout $u \in E$, $\exists!\,(u_1, u_2) \in F \times G$ tel que $u = u_1 + u_2$.
Considérons l'endomorphisme f de E défini pour tout $u \in E$ par : $f(u) = u_1$.

(a) Si $u \in F$, que vaut $f(u)$? Justifier soigneusement.

....
....
....
....

(b) Si $u \in G$, que vaut $f(u)$? Justifier soigneusement.

....
....
....
....

(c) Soit $\mathcal{B}$ la base obtenue par concaténation des bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$. Donner la matrice A' de f dans la base $\mathcal{B}$ au départ et à l'arrivée.

....
....
....
....
....
....

(d) Trouver la matrice A de f dans la base canonique au départ et à l'arrivée.

Exercice 5 : diagonalisation (8 points)

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 3 \\ -3 & -2 & 3 \\ -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Calculer **sous forme factorisée** son polynôme caractéristique. Vérifier que ses valeurs propres sont -2 et 1.

2. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$? Si oui, donner P et D.
   Vous prendrez soin de votre rédaction.