EPITA

Mathématiques

Contrôle de mi-semestre S3

Octobre 2023

Durée : 3 heures

Nom : Rodet

Prénom : Louis

Classe : B1

NOTE :

Le barème est sur 40 points. La note se ramenée à une note sur 20 par une simple division par 2.

Consignes :

- Lire l'énoncé entier avant de commencer. Il y a en tout 7 exercices.
- Si vous ne parvenez par à démontrer un résultat donné explicitement dans l'énoncé d'une question, vous pouvez admettre ce résultat et continuer l'exercice.
- Documents et calculatrices interdits.
- Répondre directement sur les feuilles jointes, dans les espaces prévus. Aucune autre feuille ne sera corrigée.
- Ne pas écrire au crayon de papier.

Exercice 1 (6 points)

1. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$. Justifier proprement.

2. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(n!)^2}{(3n)!}$. Justifier proprement.

3. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n\ln(n)}$. Justifier proprement.

Exercice 2 (6 points)

Considérons la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.

1. Trouver $a \in \mathbb{R}$ tel que $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{a}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

2. Déterminer la nature de $\sum u_n$.

3. Montrer que $u_n \sim \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

4. Les séries $\sum u_n$ et $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ sont-elles de même nature ? Expliquer.

Exercice 3 (7 points)

Soit $a \in]0, \pi[$. On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = n! \times \prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{a}{k}\right) = n! \times \left(\sin\left(\frac{a}{1}\right)\sin\left(\frac{a}{2}\right)\cdots\sin\left(\frac{a}{n}\right)\right)$$

On admet que cette suite (u_n) est strictement positive. Le but de l'exercice est d'étudier la nature de $\sum u_n$ en fonction de a.

1. On suppose dans cette question que $a \neq 1$. En utilisant la règle de d'Alembert, discuter la nature de $\sum u_n$ en fonction de a.

....
....
....
....
....
....
....

2. On suppose dans cette question de $a = 1$. Considérons la série $\sum \ln\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ et la suite (S_n) de ses sommes partielles.

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \ln(u_n)$.

....
....
....
....
....

(b) Étudier la nature de $\sum \ln\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....

(c) Que peut-on en déduire sur la suite (u_n) ?

....
....
....
....

(d) La série $\sum u_n$ est-elle convergente ?

....
....
....
....
....

Exercice 4 : un peu de cours et une démonstration (5.5 points)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles strictement positives.

1. On suppose dans cette question que $(u_n) \leqslant (v_n)$ à partir d'un certain rang. Ainsi, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant n_0 \Longrightarrow u_n \leqslant v_n$$

Dans chacune des expressions ci-dessous, remplacer les pointillés par un des symboles $\Longrightarrow$, $\Longleftarrow$ ou $\Longleftrightarrow$:

(a) $\sum u_n$ converge $\cdots\cdots$ $\sum v_n$ converge

(b) $\sum u_n$ diverge $\cdots\cdots$ $\sum v_n$ diverge

2. On suppose maintenant qu'au voisinage de $+\infty$, $u_n \sim v_n$.

(a) Que peut-on dire des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$?

....

(b) Démontrer cette propriété. **On pourra admettre sans démonstration les résultats de la question 1.**

....

Exercice 5 : probabilités (6.5 points)

Un étudiant passe un examen sous forme de QCM. L'examen contient 20 questions et chaque question est notée sur 1 point. La note totale de l'épreuve est donc une note sur 20. C'est un QCM sans points négatifs ni points intermédiaires : à chaque question, la note obtenue ne peut être que 0 ou 1.
L'étudiant s'est mal préparé à l'examen et choisit de répondre au hasard. Ses réponses aux questions sont indépendantes et, pour chaque question, il a une même probabilité $p \in]0,1[$ que sa réponse soit juste.

1. Pour tout $k \in [\![1, 20]\!]$, on définit la variable aléatoire $X_k =$ «Note de l'étudiant à la question k».
   (a) Soit $k \in [\![1, 20]\!]$. Donner la loi de X_k.

   ....
   ....
   ....

   (b) En déduire la fonction génératrice G_{X_k} de X_k.

   ....

   (c) En utilisant G_{X_k}, calculer l'espérance et la variance de X_k.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

2. Considérons la variable aléatoire $Y =$ «Note totale obtenue par l'étudiant à l'épreuve».
   (a) Donner en justifiant la fonction génératrice de Y.

   ....
   ....
   ....

   (b) En déduire la loi de Y.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

   (c) Calculer l'espérance et la variance de Y.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   .... [Suite du cadre page suivante]

....
....
....
....
....
....
....

Exercice 6 : séries entières (6 points)

1. Trouver le rayon de convergence R_1 de la série entière $\sum \frac{x^n}{n!}$. Justifier votre réponse.

....
....
....
....
....

2. Rappeler (sans justifier) une expression simple (à l'aide des fonctions usuelles) de sa fonction somme, définie pour tout $x \in]-R_1, R_1[$ par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

....

3. En déduire la rayon de convergence et une expression simple de la fonction somme de $\sum \frac{2^n}{n!} x^n$.

....
....
....

4. Trouver un expression simple de $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-3)!}$.

....
....
....

5. Démontrer que la fonction $g : x \longmapsto \frac{1}{1+2x}$ peut se mettre sous la forme $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-2)^n x^n$.

   Quel est le rayon de convergence R_2 de cette série entière ?

....
....
....
....
....
....

6. Exprimer sous la forme d'une série entière la fonction $x \longmapsto \ln(1+2x)$ et donner son rayon de convergence.

7. Exprimer sous la forme d'une série entière la fonction $x \longmapsto \dfrac{x^2}{(1+2x)^2}$ et donner son rayon de convergence.

Exercice 7 : probabilités infinies (4 points)

Considérons une variable aléatoire entière X admettant une fonction génératrice de la forme $G_X(t) = a\,e^{2t}$ où $a \in \mathbb{R}$.

1. Quelle est la valeur de a ?

2. En écrivant $G_X(t)$ sous forme d'une série entière, en déduire la loi de X.

3. Calculer l'espérance et la variance de X.