Contrôle de mi-semestre S3 : corrigé

Exercice 1 (6 points)

1. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$. Justifier proprement.

   $u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = -\frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{1}{2n^2}$.

   Or $-\frac{1}{2n^2} < 0$ est de signe constant, donc $\sum u_n$ est de même nature que $-\frac{1}{2}\sum \frac{1}{n^2}$.

   Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge (Riemann), $\sum u_n$ converge.

2. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \frac{(n!)^2}{(3n)!}$. Justifier proprement.

   La suite (u_n) est strictement positive.

   De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} \sim \frac{n^2}{27n^3} = \frac{1}{27n}$.

   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{27n} = 0$.

   Comme $0 < 1$, $\sum u_n$ converge d'après d'Alembert.

3. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n\ln(n)}$. Justifier proprement.

   La suite (u_n) est alternée. De plus, $\big(|u_n|\big) = \left(\frac{1}{n\ln(n)}\right)$ est décroissante et converge vers 0.

   Ainsi, $\sum u_n$ converge d'après le CSSA.

Exercice 2 (6 points)

Considérons la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.

1. Trouver $a \in \mathbb{R}$ tel que $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

   Remarquons que u_n peut s'écrire
   $$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \times \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}$$

   En utilisant le DL en 0 : $\frac{1}{1+x} = 1 - x + o(x)$, on obtient
   $$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \times \left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

   en remarquant que $-(-1)^{2n} = -1$. Ainsi, $a = -1$.

2. Déterminer la nature de $\sum u_n$.

   Posons $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $w_n = -\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

$\sum v_n$ converge en vertu du CSSA. En effet, (v_n) est alternée et $\left(|v_n|\right) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est décroissante et converge vers 0.

$w_n \sim -\dfrac{1}{n}$. Or $-\dfrac{1}{n} < 0$ est de signe constant, donc $\sum w_n$ est de même nature que $\sum \dfrac{-1}{n}$, qui diverge. Ainsi, $\sum w_n$ diverge.

Finalement, $\sum u_n$ diverge car c'est la somme d'une série convergente et d'une série divergente.

3. Montrer que $u_n \sim \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

   Il faut montrer que $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + o\left(\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.

   Comme $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$, il faut montrer que $-\dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right) = o\left(\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$.

   Or
$$\frac{-\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = (-1)^n \left(\frac{-1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

   On a donc bien $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + o\left(\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ et donc $u_n \sim \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

4. Les séries $\sum u_n$ et $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ sont-elles de même nature ? Expliquer.

   Les deux séries ne sont pas de même nature : $\sum u_n$ diverge alors que $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge. Les critères de comparaison ne s'appliquent pas ici car (u_n) n'est pas de signe constant.

Exercice 3 (7 points)

Soit $a \in]0, \pi[$. On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = n! \times \prod_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{a}{k}\right) = n! \times \left(\sin\left(\frac{a}{1}\right)\sin\left(\frac{a}{2}\right)\cdots\sin\left(\frac{a}{n}\right)\right)$$

On admet que cette suite (u_n) est strictement positive. Le but de l'exercice est d'étudier la nature de $\sum u_n$ en fonction de a.

1. On suppose dans cette question que $a \neq 1$. En utilisant la règle de d'Alembert, discuter la nature de $\sum u_n$ en fonction de a.

   $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = (n+1)\sin\left(\dfrac{a}{n+1}\right)$. Or au voisinage de 0, $\sin(x) \sim x$. Ainsi, quand n tend vers $+\infty$,
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \sim (n+1) \times \left(\frac{a}{n+1}\right) \sim a \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = a$$

   Finalement, d'après d'Alembert, $\sum u_n$ converge si $a < 1$ et diverge si $a > 1$.

2. On suppose dans cette question de $a = 1$. Considérons la série $\sum \ln\left(n \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$ et la suite (S_n) de ses sommes partielles.

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \ln(u_n)$.

   On sait que $n! = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} k$. Ainsi,
$$\ln(u_n) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} k \sin\left(\frac{a}{k}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(k \sin\left(\frac{1}{k}\right)\right) = S_n$$

(b) Étudier la nature de $\sum \ln\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

On a

$$\ln\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \ln\left(n \times \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

Ainsi,

$$\ln\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) = -\frac{1}{6n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim -\frac{1}{6n^2}$$

Comme $-\frac{1}{6n^2} < 0$ est de signe constant, $\sum \ln\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ est de même nature que $\sum -\frac{1}{6n^2}$ qui converge d'après Riemann.

Finalement, $\sum \ln\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ converge.

(c) Que peut-on en déduire sur la suite (u_n) ?

La suite (S_n) converge d'après la question précédente. Notons ℓ sa limite. On a alors

$$u_n = e^{S_n} \Longrightarrow u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{\ell}$$

Donc la suite (u_n) converge.

(d) La série $\sum u_n$ est-elle convergente ?

La suite (u_n) converge vers e^{ℓ} qui n'est pas nul (car la fonction exponentielle ne s'annule pas). On en déduit que (u_n) ne converge pas vers 0, donc que $\sum u_n$ diverge.

Exercice 4 : un peu de cours et une démonstration (5.5 points)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles strictement positives.

1. On suppose dans cette question que $(u_n) \leqslant (v_n)$ à partir d'un certain rang. Ainsi, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant n_0 \Longrightarrow u_n \leqslant v_n$$

Dans chacune des expressions ci-dessous, remplacer les pointillés par un des symboles $\Longrightarrow$, $\Longleftarrow$ ou $\Longleftrightarrow$:

(a) $\sum u_n$ converge $\Longleftarrow$ $\sum v_n$ converge

(b) $\sum u_n$ diverge $\Longrightarrow$ $\sum v_n$ diverge

2. On suppose maintenant qu'au voisinage de $+\infty$, $u_n \sim v_n$.

(a) Que peut-on dire des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$?

Les deux séries sont de même nature.

(b) Démontrer cette propriété. **On pourra admettre sans démonstration les résultats de la question 1.**

Supposons que $(u_n) \sim (v_n)$. Alors il existe une suite (ε_n) telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n \times (1 + \varepsilon_n) \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Comme (ε_n) converge vers 0, elle est comprise entre $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$ à partir d'un certain rang : il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 &\Longrightarrow -\tfrac{1}{2} \leqslant \varepsilon_n \leqslant \tfrac{1}{2} \\ &\Longrightarrow \tfrac{1}{2} \leqslant 1 + \varepsilon_n \leqslant \tfrac{3}{2} \\ &\Longrightarrow \tfrac{1}{2} v_n \leqslant u_n \leqslant \tfrac{3}{2} v_n \end{aligned}$$

Alors si $\sum u_n$ converge, on déduit la propriété 1.a et de l'inégalité $\frac{1}{2}v_n \leqslant u_n$ que $\sum \frac{1}{2}v_n$ converge et donc que $\sum v_n$ converge.

Et si $\sum u_n$ diverge, on déduit de la propriété 1.b et de l'inégalité $u_n \leqslant \frac{3}{2}v_n$ que $\sum \frac{3}{2}v_n$ diverge et donc que $\sum v_n$ diverge.

Exercice 5 : probabilités (6.5 points)

Un étudiant passe un examen sous forme de QCM. L'examen contient 20 questions et chaque question est notée sur 1 point. La note totale de l'épreuve est donc une note sur 20. C'est un QCM sans points négatifs ni points intermédiaires : à chaque question, la note obtenue ne peut être que 0 ou 1.
L'étudiant s'est mal préparé à l'examen et choisit de répondre au hasard. Ses réponses aux questions sont indépendantes et, pour chaque question, il a une même probabilité $p \in]0,1[$ que sa réponse soit juste.

1. Pour tout $k \in [\![1,20]\!]$, on définit la variable aléatoire $X_k =$ «Note de l'étudiant à la question k».

   (a) Soit $k \in [\![1,20]\!]$. Donner la loi de X_k.

   $$X_k(\Omega) = \{0,1\}, \qquad P(X_k{=}0) = 1-p \quad \text{et} \quad P(X_k{=}1) = p$$

   Ainsi, $X_k \rightsquigarrow \text{Bernoulli}(p)$.

   (b) En déduire la fonction génératrice G_{X_k} de X_k.

   $G_{X_k}(t) = (1-p) + pt$

   (c) En utilisant G_{X_k}, calculer l'espérance et la variance de X_k.

   Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_{X_k}{}'(t) = p \Longrightarrow \mathrm{E}(X_k) = G_{X_k}{}'(1) = p$

   De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

   $$G_{X_k}{}''(t) = 0 \Longrightarrow \mathrm{Var}(X_k) = G_{X_k}{}''(1) + \mathrm{E}(X_k) - \mathrm{E}^2(X_k) = 0 + p - p^2 = p(1-p)$$

2. Considérons la variable aléatoire $Y =$ «Note totale obtenue par l'étudiant à l'épreuve».

   (a) Donner en justifiant la fonction génératrice de Y.

   $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_{20}$. Comme les variables X_k sont indépendantes, on en déduit

   $$\forall t \in \mathbb{R},\ G_Y(t) = G_{X_1}(t) \times \cdots \times G_{X_{20}}(t) = \big((1-p)+pt\big)^{20}$$

   (b) En déduire la loi de Y.

   Développons $G_Y(t)$ à l'aide de la formule du binôme : pour tout $t \in \mathbb{R}$,

   $$G_Y(t) = \sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k} (pt)^k (1-p)^{20-k} = \sum_{k=0}^{20} \binom{20}{k} p^k (1-p)^{20-k}\, t^k$$

   Ainsi,

   $$Y(\Omega) = [\![0,20]\!] \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![0,20]\!],\ P(Y{=}k) = \binom{20}{k} p^k (1-p)^{20-k}$$

   (c) Calculer l'espérance et la variance de Y.

   $Y = X_1 + \cdots + X_{20} \Longrightarrow \mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(X_1) + \cdots + \mathrm{E}(X_{20}) = p + \cdots + p = 20p$
   De plus, comme les variables X_k sont indépendantes,

   $$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(X_1) + \cdots + \mathrm{Var}(X_{20}) = p(1-p) + \cdots + p(1-p) = 20p(1-p)$$

Exercice 6 : séries entières (6 points)

1. Trouver le rayon de convergence R_1 de la série entière $\sum \dfrac{x^n}{n!}$. Justifier votre réponse.

   Règle de d'Alembert pour les séries entières : $\dfrac{\left|\frac{1}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{1}{n!}\right|} = \dfrac{n!}{(n+1)!} = \dfrac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

   Le rayon de convergence de la série est donc $R_1 = +\infty$.

2. Rappeler (sans justifier) une expression simple (à l'aide des fonctions usuelles) de sa fonction somme, définie pour tout $x \in]-R_1, R_1[$ par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Il s'agit de la série exponentielle. Sa fonction somme est $f(x) = e^x$

3. En déduire la rayon de convergence et une expression simple de la fonction somme de $\sum \frac{2^n}{n!} x^n$.

Il s'agit de la série précédente appliquée à $X = 2x$. Cette série converge pour tout $X \in \mathbb{R}$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Sa somme vaut donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2x)^n}{n!} = e^{2x}$, son rayon de convergence est $+\infty$.

4. Trouver un expression simple de $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-3)!}$.

$\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-3)!} = x^3 \times \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^{n-3}}{(n-3)!} = x^3 \times \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ en posant $k = n-3$.

Donc $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-3)!} = x^3\, e^x$.

5. Démontrer que la fonction $g : x \longmapsto \dfrac{1}{1+2x}$ peut se mettre sous la forme $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-2)^n x^n$.

Quel est le rayon de convergence R_2 de cette série entière ?

La série entière $\sum(-2)^n x^n$ se met sous la forme $\sum(-2x)^n$. C'est une série géométrique qui converge si et seulement si $|-2x| < 1$, donc si et seulement si $|x| < \frac{1}{2}$. Ainsi, $R_2 = \frac{1}{2}$. De plus, quand la série converge, sa somme est

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-2x)^n = \frac{1}{1-(-2x)} = \frac{1}{1+2x}$$

6. Exprimer sous la forme d'une série entière la fonction $x \longmapsto \ln(1+2x)$ et donner son rayon de convergence.

Intégrons la série précédente : on obtient

$$\int_0^x \frac{1}{1+2t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln(1+2x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-2)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

et le rayon de convergence de cette série est le même que la série précédente. Il vient donc

$$\ln(1+2x) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2 \times (-2)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\sum_{n=0}^{+\infty} (-2)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Le rayon de convergence est $\frac{1}{2}$.

7. Exprimer sous la forme d'une série entière la fonction $x \longmapsto \dfrac{x^2}{(1+2x)^2}$ et donner son rayon de convergence.

Dérivons la série de la question 5. On obtient

$$\frac{-2}{(1+2x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-2)^n n\, x^{n-1} \qquad \text{et le rayon de convergence est } R_2 = \frac{1}{2}$$

Donc

$$\frac{1}{(1+2x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-2)^{n-1} n\, x^{n-1} \Longrightarrow \frac{x^2}{(1+2x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-2)^{n-1} n\, x^{n+1}$$

Exercice 7 : probabilités infinies (4 points)

Considérons une variable aléatoire entière X admettant une fonction génératrice de la forme $G_X(t) = a\,e^{2t}$ où $a \in \mathbb{R}$.

1. Quelle est la valeur de a ?

   $G_X(1) = 1 \Longrightarrow a\,e^2 = 1 \Longrightarrow a = e^{-2}$

2. En écrivant $G_X(t)$ sous forme d'une série entière, en déduire la loi de X.

   Développons $G_X(t)$ en série entière :

$$G_X(t) = e^{-2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2t)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2} \frac{2^n}{n!}\, t^n$$

   Ainsi,

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ P(X{=}n) = e^{-2} \frac{2^n}{n!}$$

3. Calculer l'espérance et la variance de X.

   Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\quad G_X{}'(t) = e^{-2} \times 2e^{2t} \quad$ et $\quad G_X{}''(t) = e^{-2} \times 4e^{2t}$

   Donc $\quad \mathrm{E}(X) = G_X{}'(1) = e^{-2} \times 2e^2 = 2.$

   Et $\quad \mathrm{Var}(X) = G_X{}''(1) + \mathrm{E}(X) - \mathrm{E}^2(X) = 4 + 2 - 4 = 2.$