Exercice 1 (6 points)

1. Déterminer la nature de la série de terme général $\quad u_n = \dfrac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2}$. Justifier proprement.

   $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n} \Longrightarrow u_n \sim \dfrac{1}{n^3}$.
   Comme $\dfrac{1}{n^3} \geqslant 0$, $\sum u_n$ a la nature de $\sum \dfrac{1}{n^3}$ qui converge. Ainsi $\sum u_n$ converge.

2. Déterminer la nature de la série de terme général $\quad u_n = \dfrac{n^2 e^{-\sqrt{n}}}{2^{2n}}$. Justifier proprement.

   La suite (u_n) est positive. De plus, $n^2 u_n = \dfrac{n^4}{e^{\sqrt{n}+n\ln(4)}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $u_n = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

   Comme $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge, $\sum u_n$ converge.

   Remarque : on peut aussi utiliser d'Alembert ou Cauchy, on trouve alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = \dfrac{1}{4}$.

3. Déterminer la nature de la série de terme général $\quad u_n = (-1)^n \dfrac{n}{e^n}$. Justifier proprement.

   $n^2|u_n| = \dfrac{n^3}{e_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $|u_n| = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
   Comme $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge, $\sum |u_n|$ converge. Ainsi, $\sum u_n$ converge absolument donc converge.

   Remarque : on peut aussi utiliser le CSSA. La suite $(|u_n|)$ est décroissante à partir du rang $n = 1$.

Exercice 2 (6 points)

Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $a > 0$. Considérons la suite (u_n) définie pour tout $n \geqslant 2$ par : $\quad u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n^a + (-1)^n}}$.

Le but de l'exercice est d'étudier la nature de $\sum u_n$.

1. Déterminer $c \in \mathbb{R}$ tel que $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{a/2}} + \dfrac{c}{n^{3a/2}} + o\left(\dfrac{1}{n^{3a/2}}\right)$.

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^a}} \times \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{n^a}}} \\ &= \frac{(-1)^n}{n^{a/2}} \times \left(1 + \frac{(-1)^n}{n^a}\right)^{-1/2} \\ &= \frac{(-1)^n}{n^{a/2}} \times \left(1 - \frac{(-1)^n}{2n^a} + o\left(\frac{1}{n^a}\right)\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{n^{a/2}} - \frac{1}{2n^{3a/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3a/2}}\right) \end{aligned}$$

   Ainsi, $c = -\dfrac{1}{2}$.

2. À l'aide du résultat de la question précédente, discuter la nature de $\sum u_n$ en fonction de la valeur de a.

   Posons $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{a/2}}$ et $w_n = -\dfrac{1}{2n^{3a/2}} + o\left(\dfrac{1}{n^{3a/2}}\right)$
   La série $\sum u_n$ est alors la somme des deux séries $\sum v_n$ et $\sum w_n$.

   - $\sum v_n$ converge en vertu du CSSA. En effet, (v_n) est alternée, $\big(|v_n|\big) = \left(\dfrac{1}{n^{a/2}}\right)$ est décroissante et tend vers 0.

- $w_n \sim -\dfrac{1}{2n^{3a/2}} < 0$. Comme $-\dfrac{1}{2n^{3a/2}}$ est de signe constant, $\sum w_n$ a même nature que $\sum -\dfrac{1}{2n^{3a/2}}$. Or cette dernière série est une série de Riemann qui converge ssi $a > \frac{2}{3}$.
- En conclusion :
Si $a > \frac{2}{3}$, $\sum u_n$ est la somme de deux séries convergentes donc elle converge.
Si $a \leqslant \frac{2}{3}$, $\sum u_n$ est la somme d'une série convergente et d'une série divergente donc elle diverge

Exercice 3 (8 points)

On se donne pour but d'étudier le comportement de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_n = \dfrac{2^n n!}{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}$.

Pour cela, on utilise la suite auxiliaire (v_n) définie par : $\quad v_n = \ln(u_n) - \dfrac{1}{2}\ln(n)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2(n+1)}{2(n+1)-1} = \frac{2n+2}{2n+1} = \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{2n}}$$

2. En déduire que $\quad v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{2}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)$.

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \ln(u_{n+1}) - \frac{1}{2}\ln(n+1) - \ln(u_n) + \frac{1}{2}\ln(n) \\
&= \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\
&= \ln\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{2n}}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&= \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{2n}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)
\end{aligned}$$

3. Déterminer $a \in \mathbb{R}$ tel que $\quad v_{n+1} - v_n \sim \dfrac{a}{n^2}$.

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{2n}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= -\frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&\sim -\frac{1}{8n^2}
\end{aligned}$$

Ainsi, $a = -\frac{1}{8}$.

4. Montrer que (v_n) converge. On note ℓ sa limite.

$v_{n+1} - v_n \sim -\dfrac{1}{8n^2} < 0$. Comme $-\dfrac{1}{8n^2}$ est de signe constant, $\sum(v_{n+1} - v_n)$ a même nature que $\sum -\dfrac{1}{8n^2}$. Or cette dernière série converge.

Ainsi, $\sum(v_{n+1} - v_n)$ converge et donc, par télescopage, (v_n) converge aussi.

5. Déduire des questions précédentes qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \sim k\sqrt{n}$. Exprimer k en fonction de ℓ.

   Tout d'abord, remarquons que $v_n = \ln(u_n) - \dfrac{1}{2}\ln(n) \Longrightarrow \ln(u_n) = v_n + \dfrac{1}{2}\ln(n) \Longrightarrow u_n = e^{v_n}\sqrt{n}$.

   Donc $\dfrac{u_n}{e^\ell\sqrt{n}} = \dfrac{e^{v_n}}{e^\ell} = e^{v_n-\ell} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^0 = 1$

   Ainsi, $v_n \sim e^\ell\sqrt{n}$ et $k = e^\ell$.

Exercice 4 : critère spécial des séries alternées (5 points)

Soit (u_n) une suite réelle de signe alterné.

1. Énoncer le critère spécial des séries alternées.

   Si la suite $\big(|u_n|\big)$ est décroissante et converge vers 0 alors :
   - La série $\sum u_n$ converge.
   - La suite (R_n) des restes de la série vérifie : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, |R_n| \leqslant |u_{n+1}|$

2. Démontrer ce théorème.

   N.B. : on ne démontrera que la convergence de la série $\sum u_n$. Il n'est pas demandé de démontrer la majoration du reste de la série.

   Soit une suite (u_n) alternée. Alors il existe une suite (a_n) positive telle que

$$(u_n) = \Big((-1)^n a_n\Big) \qquad \text{ou} \qquad (u_n) = \Big(-(-1)^n a_n\Big)$$

   Quitte à remplacer (u_n) par $(-u_n)$, nous allons supposer que $(u_n) = \Big((-1)^n a_n\Big)$. La suite positive (a_n) est en fait la suite $(|u_n|)$. D'après les hypothèses du théorème, elle est donc décroissante et converge vers 0.

   Notons (S_n) les sommes partielles de $\sum u_n$: pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n a_n$$

   Dans une première étape, montrons que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

   - Monotonie de (S_{2n}) : cette suite contient les termes de rangs pairs de (S_n). Le terme suivant S_{2n} est donc $S_{2(n+1)} = S_{2n+2}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} S_{2n} & = & a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + a_{2n} \\ S_{2(n+1)} & = & a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + a_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2} \\ \hline S_{2(n+1)} - S_{2n} & = & -a_{2n+1} + a_{2n+2} \end{array}\right.$$

     Mais comme (a_n) est décroissante, $-a_{2n+1} + a_{2n+2}$ est négatif. La suite (S_{2n}) est donc décroissante.

   - Monotonie de (S_{2n+1}) : cette suite contient les termes de rangs impairs de (S_n). Le terme suivant S_{2n+1} est donc $S_{2(n+1)+1} = S_{2n+3}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left\{\begin{array}{rcl} S_{2n+1} & = & a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + a_{2n} - a_{2n+1} \\ S_{2(n+1)+1} & = & a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + a_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2} - a_{2n+3} \\ \hline S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} & = & a_{2n+2} - a_{2n+3} \end{array}\right.$$

     Mais comme (a_n) est décroissante, $a_{2n+2} - a_{2n+3}$ est positif. La suite (S_{2n+1}) est donc croissante.

   - Étude de $S_{2n+1} - S_{2n}$: pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left\{\begin{array}{rcl} S_{2n} & = & a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + a_{2n} \\ S_{2n+1} & = & a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + a_{2n} - a_{2n+1} \\ \hline S_{2n+1} - S_{2n} & = & -a_{2n+1} \end{array}\right.$$

     Comme (a_n) converge vers 0, $(S_{2n+1} - S_{2n})$ converge aussi vers 0.

Ainsi, les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. Elles convergent donc toutes les deux et admettent une même limite ℓ. Mais alors,

$$\left.\begin{array}{ccc} S_{2n} & \xrightarrow[n\to+\infty]{} & \ell \\ S_{2n+1} & \xrightarrow[n\to+\infty]{} & \ell \end{array}\right\} \Longrightarrow S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$$

Ce qui montre que (S_n) converge et donc que $\sum u_n$ converge.

Exercice 5 : probabilités (5 points)

Soient X_1, X_2 et X_3 trois variables aléatoires indépendantes, prenant leurs valeurs dans $\{1,3\}$, telles que pour tout $i \in [\![1,3]\!]$,

$$P(X_i{=}1) = \frac{1}{3} \qquad \text{et} \qquad P(X_i{=}3) = \frac{2}{3}$$

1. Quelles sont les fonctions génératrices G_{X_i} de ces trois variables ?

   $G_{X_1}(t) = G_{X_2}(t) = G_{X_3}(t) = \dfrac{t+2t^3}{3}$

2. Soit la variable aléatoire $Y = X_1 + X_2 + X_3$. Calculer sa fonction génératrice G_Y et en déduire la loi de Y.

   Comme les X_i sont indépendantes, $G_Y(t) = G_{X_1}(t) \times G_{X_2}(t) \times G_{X_3}(t) = \dfrac{(t+2t^3)^3}{3^3} = \dfrac{t^3(1+2t^2)^3}{27}$

   Ainsi, $\quad G_Y(t) = \dfrac{t^3(1+6t^2+12t^4+8t^6)}{27} = \dfrac{t^3+6t^5+12t^7+8t^9}{27}$.

   La loi de Y est donc donnée par :

   $$Y(\Omega) = \{3,5,7,9\} \quad \text{avec} \quad P(Y{=}3) = \frac{1}{27},\ P(Y{=}5) = \frac{6}{27} = \frac{2}{9},\ P(Y{=}7) = \frac{12}{27} = \frac{4}{9} \text{ et } P(Y{=}9) = \frac{8}{27}$$

3. Déterminer l'espérance et la variance de Y.

   D'une part, $\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(X_1) + \mathrm{E}(X_2) + \mathrm{E}(X_3)$ et d'autre part, comme les X_i sont indépendantes, $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) + \mathrm{Var}(X_3)$.

   - $G_{X_i}(t) = \dfrac{t+2t^3}{3} \Longrightarrow G'_{X_i}(t) = \dfrac{1+6t^2}{3} \Longrightarrow \mathrm{E}(X_i) = G'_{X_i}(1) = \dfrac{7}{3}$.
     Ainsi, $\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(X_1) + \mathrm{E}(X_2) + \mathrm{E}(X_3) = 7$.
   - $G''_{X_i}(t) = \dfrac{12t}{3} = 4t \Longrightarrow \mathrm{Var}(X_i) = G''_{X_i}(1) + \mathrm{E}(X_i) - \mathrm{E}^2(X_i) = 4 + \dfrac{7}{3} - \dfrac{49}{9} = \dfrac{8}{9}$.

     Ainsi, $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) + \mathrm{Var}(X_3) = \dfrac{8}{3}$.

Exercice 6 : séries entières (10 points)

On se propose de trouver une fonction f qui satisfait aux conditions suivantes (C) : $\begin{cases} f'' + xf' + f = 0 \\ f(0) = 1 \text{ et } f'(0) = 0 \end{cases}$

Pour cela, on suppose qu'il existe une série entière $\sum a_n x^n$, admettant un rayon de convergence $R > 0$, telle que :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \qquad \text{et} \qquad f \text{ solution de } (C) \text{ sur }]-R,R[$$

N.B. : l'équation différentielle $f'' + xf' + f = 1$ est une équation linéaire du second ordre à coefficients non constants. **On ne cherchera donc pas à utiliser les méthodes étudiées au S2** sur les équations différentielles du second ordre, car ces méthodes ne fonctionnent que pour des équations à coefficients constants.

1. Exprimer $f(0)$ et $f'(0)$ en fonction de la suite (a_n). Qu'en déduit-on pour les valeurs de a_0 et a_1 ?

   $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots \Longrightarrow f(0) = a_0$

   $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots \Longrightarrow f'(0) = a_1$

   Des conditions $f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$, on déduit : $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$.

2. Définir en fonction de (a_n) deux suites (b_n) et (c_n) telles que pour tout $x \in]-R, R[$,

$$xf'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \qquad \text{et} \qquad f''(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$

   $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \Longrightarrow xf'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n$. Ainsi, $(b_n) = (na_n)$.

   $f''(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = (2\times 1)a_2 + (3\times 2)a_3 x + (4\times 3)x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n$.

   Ainsi, $(c_n) = \big((n+2)(n+1)a_{n+2}\big)$.

3. En reportant ces expressions de $xf'(x)$ et de $f''(x)$ dans l'équation $f''(x) + xf'(x) + f(x) = 0$, mettre cette dernière équation sous la forme

$$\forall x \in]-R, R[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} d_n x^n = 0$$

   où les coefficients (d_n) sont exprimés en fonction de la suite (a_n).

$$\begin{aligned} \forall x \in]-R,R[, f''(x) + xf'(x) + f(x) = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \forall x \in]-R,R[, \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \\ &\Longrightarrow \quad \forall x \in]-R,R[, \sum_{n=0}^{+\infty} (c_n + b_n + a_n) x^n = 0 \end{aligned}$$

   Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n = (n+2)(n+1)a_{n+2} + na_n + a_n = (n+1)\big((n+2)a_{n+2} + a_n\big)$

4. En remarquant que la condition $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} d_n x^n = 0$ implique que tous les coefficients d_n sont nuls, montrer que

$$a_2 = -\frac{1}{2}, \qquad a_3 = 0 \qquad \text{et plus généralement :} \qquad \forall \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+2}$$

   Les coefficients d_n étant tous nuls, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(n+1)\big((n+2)a_{n+2} + a_n\big) = 0 \Longrightarrow (n+2)a_{n+2} + a_n = 0 \Longrightarrow a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+2}$$

   Ainsi, par exemple, comme $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$, on obtient $a_2 = -\dfrac{a_0}{2} = -\dfrac{1}{2}$ et $a_3 = -\dfrac{a_1}{3} = 0$.

5. Que vaut a_n quand n est impair ?

   $a_1 = 0, \quad a_3 = -\dfrac{a_1}{3} = 0, \quad a_5 = -\dfrac{a_3}{5} = 0, \quad \cdots$

   Finalement, les coefficients a_n sont tous nuls quand n est impair.

6. Déterminer la valeur de a_n quand n est pair.

   Indication : on posera $n = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$), puis on exprimera a_{2k} d'abord en fonction de $a_{2(k-1)}$, puis en fonction de $a_{2(k-2)}$, etc. jusqu'à une expression de a_{2k} en fonction de a_0.

   $a_{2k} = -\dfrac{a_{2(k-1)}}{2k} = \left(-\dfrac{1}{2k}\right) \times a_{2(k-1)} = \left(-\dfrac{1}{2k}\right) \times \left(-\dfrac{1}{2(k-1)}\right) \times a_{2(k-2)} = \cdots$

   En continuant, on trouve : $a_{2k} = \left(-\dfrac{1}{2k}\right) \times \left(-\dfrac{1}{2(k-1)}\right) \times \cdots \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) a_0$

   Comme $a_0 = 1$, on obtient $a_{2k} = \dfrac{(-1)^k}{2^k\, k!} = \dfrac{\left(-\frac{1}{2}\right)^k}{k!}$.

7. En déduire $f(x)$, qu'on exprimera d'abord sous la forme d'une série entière, puis à l'aide des fonctions usuelles.

   On sait que $\quad f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$

   Or dans cette somme, seuls les termes de rangs pairs sont non nuls. On peut donc écrire :

   $$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k} x^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^k}{k!} x^{2k}$$

   En remarquant que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{\left(-\frac{1}{2}\right)^k}{k!} x^{2k} = \dfrac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^k}{k!}$, on obtient

   $$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^k}{k!}$$

   On reconnait la série exponentielle appliquée en $-\frac{x^2}{2}$.

   Ainsi, pour tout $x \in]-R, R[$, $f(x) = e^{-x^2/2}$.

8. **(Bonus)** Vérifier que l'expression trouvée à la question précédente est solution de (C) sur $\mathbb{R}$ tout entier.

   Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2/2}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

   - $f'(x) = \left(-x^2/2\right)' e^{-x^2/2} = -x\, e^{-x^2/2}$
   - $f''(x) = -e^{-x^2/2} - x\left(e^{-x^2/2}\right)' = -e^{-x^2/2} + x^2\, e^{-x^2/2}$

   Ainsi, $f(0) = 1, \quad f'(0) = 0 \quad$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

   $$f''(x) + xf'(x) + f(x) = \left(-e^{-x^2/2} + x^2\, e^{-x^2/2}\right) - \left(x^2\, e^{-x^2/2}\right) + \left(e^{-x^2/2}\right) = 0$$

   f est donc bien solution de (C).