EPITA

Mathématiques

Contrôle S3

Novembre 2021

Durée : 3 heures

Nom :

Prénom :

Classe :

NOTE :

Consignes :

— Documents et calculatrices interdits.
— Répondre directement sur les feuilles jointes, dans les espaces prévus. Aucune autre feuille ne sera corrigée.
— Ne pas écrire au crayon de papier.

Exercice 1 (3 points)

1. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{\sin(2n)}{n^2}$.

2. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{n^2}{e^{n^2}}$.

3. Quelle est la nature de la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{\ln(n)}$?

Exercice 2 (3 points)

Considérons la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_n = \sqrt{n + (-1)^n} - \sqrt{n}$.

Le but de l'exercice est de déterminer la nature de $\sum u_n$.

1. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u_n = \dfrac{a\,(-1)^n}{n^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{b}{n^{\frac{3}{2}}} + o\left(\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$.

2. À l'aide du résultat de la question précédente, déterminer la nature de $\sum u_n$.

Exercice 3 (4 points)

Le but de cet exercice est d'étudier la nature de la suite (u_n) définie par : $u_n = \dfrac{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)}{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}$.

Pour cela, on utilise la suite auxiliaire (v_n) définie par : $v_n = \ln(u_n)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et en déduire $v_{n+1} - v_n$.

2. Déterminer $a \in \mathbb{R}^+$ tel que $(v_{n+1} - v_n) \sim \dfrac{a}{n}$.

3. Quelle est la nature de (v_n) ? Et que peut-on dire de $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$?

4. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$?

Exercice 4 (6 points)

Les questions de cet exercice sont interdépendantes.

Si vous n'avez pas répondu à certaines d'entre elles, n'hésitez pas à **admettre leurs résultats et à les réutiliser, si besoin, dans des questions ultérieures**.

1. Soit $q \in \mathbb{R}^*$. On considère la série entière $\sum q^n x^n$.
   a. Quel est son rayon de convergence R ?

   b. Soit la fonction f définie sur $]-R, R[$ par : $\quad f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} q^n x^n$.
   Exprimer $f(x)$ sous la forme d'une fraction rationnelle.

   c. En déduire une expression de la fonction $g : x \longmapsto \dfrac{1}{(1-qx)^2}$ sous la forme : $\quad g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
   Expliciter les coefficients a_n et le rayon de convergence de cette série entière.

2. Soit $p \in]0,1[$. On considère une expérience qui peut mener soit à un succès (avec la probabilité p) soit à un échec (avec la probabilité $1-p$). On suppose que cette expérience peut être tentée autant de fois que l'on souhaite, chaque résultat étant indépendant des autres.

   Enfin, on définit la variable aléatoire $\quad X =$ « nombre de tentatives nécessaires pour obtenir un premier succès ».
   Ainsi, si la première tentative est un succès, on aura $X = 1$.
   a. Donner la loi de X.

b. Déterminer la fonction génératrice de X. Exprimer $G_X(t)$ d'abord sous la forme d'une série entière puis sous la forme d'une fraction rationnelle.

c. En déduire l'espérance et la variance de X.

3. On définit la variable aléatoire $Y =$ « nombre de tentatives nécessaires pour obtenir deux succès ».

a. Écrire Y comme une somme de deux variables aléatoires étudiées précédemment.

b. En déduire sa fonction génératrice $G_Y(t)$.

c. Application : en utilisant les résultats précédents, déterminer $P(Y{=}5)$.

Exercice 5 (4 points)

Soit X une variable aléatoire entière de fonction génératrice $G_X(t) = a \ln\left(1 - \frac{t}{3}\right)$.

1. Quelle est la valeur de a ?

2. En partant de la série géométrique, donner le développement en série entière de $G_X(t)$. Préciser le rayon de convergence et en déduire la loi de X.

3. Déterminer l'espérance et la variance de X.

[suite du cadre page suivante]

4. Trouver une fonction f telle que, en posant $Y = f(X)$, on ait : $G_Y(t) = t\,G_X(t)$.