EPITA

Mathématiques

Contrôle S3

Novembre 2021

Durée : 3 heures

Nom :

Prénom :

Classe :

NOTE :

Consignes :

— Documents et calculatrices interdits.
— Répondre directement sur les feuilles jointes, dans les espaces prévus. Aucune autre feuille ne sera corrigée.
— Ne pas écrire au crayon de papier.

Exercice 1 (3 points)

1. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{\sin(2n)}{n^2}$.

$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq |u_n| \leq \dfrac{1}{n^2}$

Or $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge donc $\sum |u_n|$ converge.

Ainsi, $\sum u_n$ converge absolument donc converge.

2. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{n^2}{e^{n^2}}$.

$(u_n) > 0$. Appliquons la règle de d'Alembert :

À partir de $n=1$

$u_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2}{e^{(n+1)^2}} = \dfrac{(n+1)^2}{e^{n^2+2n+1}} = \dfrac{(n+1)^2}{e^{n^2} \cdot e^{2n+1}}$

Donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \underbrace{\dfrac{(n+1)^2}{n^2}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\dfrac{1}{e^{2n+1}}}_{\to 0} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 0 < 1$, $\sum u_n$ converge.

3. Quelle est la nature de la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{\ln(n)}$?

C'est une série à termes alternés.

Or $|u_n| = \dfrac{1}{\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

De plus, $(|u_n|) = \left(\dfrac{1}{\ln(n)}\right)$ est décroissante.

En vertu du CSSA, $\sum u_n$ converge.

Exercice 2 (3 points)

Considérons la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_n = \sqrt{n+(-1)^n} - \sqrt{n}$.

Le but de l'exercice est de déterminer la nature de $\sum u_n$.

1. Déterminer $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u_n = \frac{a\,(-1)^n}{n^{\frac{1}{2}}} + \frac{b}{n^{\frac{3}{2}}} + o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$.

$\sqrt{n+(-1)^n} = \sqrt{n} \times \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{1/2} = \sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{8}\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$

$= \sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$

Donc $\sqrt{n + \frac{(-1)^n}{n}} = \sqrt{n} + \frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{n^{1/2}} - \frac{1}{8\,n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$

Et $u_n = \frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{n^{1/2}} - \frac{1}{8\,n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$

Ainsi, $a = \frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{8}$.

2. À l'aide du résultat de la question précédente, déterminer la nature de $\sum u_n$.

Posons $v_n = \frac{1}{2}\frac{(-1)^n}{n^{1/2}}$ et $w_n = -\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$

* $\sum v_n$ converge d'après le CSSA
  - (v_n) est alternée
  - $(v_n) \longrightarrow 0$
  - $|v_n| = \frac{1}{2\sqrt{n}}$ et $(|v_n|)$ est bien décroissante

* $w_n \sim -\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{n^{3/2}} < 0$ (signe constant)

Donc $\sum w_n$ a la nature de $-\frac{1}{8}\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ qui converge.

Finalement, $\sum u_n$ converge car c'est la somme de deux séries convergentes.

Exercice 3 (4 points)

Le but de cet exercice est d'étudier la nature de la suite (u_n) définie par : $u_n = \dfrac{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)}{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1)}$.

Pour cela, on utilise la suite auxiliaire (v_n) définie par : $v_n = \ln(u_n)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ et en déduire $v_{n+1} - v_n$.

$$u_{n+1} = \frac{2 \times 4 \times \cdots \times (2n) \times (2(n+1))}{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n-1) \times (2(n+1)-1)} = \overbrace{\frac{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}}^{u_n} \frac{(2n+2)}{(2n+1)}$$

Ainsi, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2n+2}{2n+1}$

Donc $v_{n+1} - v_n = \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(\dfrac{2n+2}{2n+1}\right)$

2. Déterminer $a \in \mathbb{R}^+$ tel que $(v_{n+1} - v_n) \sim \dfrac{a}{n}$.

$$v_{n+1} - v_n = \ln\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right) = \ln\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{2n}}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)$$

Donc $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{2n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right) \sim \dfrac{1}{2n}$

D'où $a = \dfrac{1}{2}$

3. Quelle est la nature de (v_n) ? Et que peut-on dire de $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$?

(v_n) a la nature de $\sum (v_{n+1} - v_n)$ (principe télescopique)

Or $v_{n+1} - v_n \sim \dfrac{1}{2n} > 0$, donc $\sum (v_{n+1} - v_n)$ a la nature de $\dfrac{1}{2} \sum \dfrac{1}{n}$ qui diverge. Donc (v_n) diverge.

De plus, (v_n) est croissante car $v_{n+1} - v_n = \ln\left(\dfrac{2n+2}{2n+1}\right) > 0$

Donc $\lim\limits_{+\infty} v_n = +\infty$.

4. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$?

$$\left.\begin{array}{l} u_n = e^{v_n} \\ v_n \longrightarrow +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

Exercice 4 (6 points)

Les questions de cet exercice sont interdépendantes.

Si vous n'avez pas répondu à certaines d'entre elles, n'hésitez pas à **admettre leurs résultats et à les réutiliser, si besoin, dans des questions ultérieures**.

1. Soit $q \in \mathbb{R}^*$. On considère la série entière $\sum q^n x^n$.

   a. Quel est son rayon de convergence R ?

   D'Alembert : $\frac{q^{n+1}}{q^n} = q \longrightarrow q$

   Donc $\left|\frac{q^{n+1}}{q^n}\right| \longrightarrow |q|$ et $R = \frac{1}{|q|}$

   b. Soit la fonction f définie sur $]-R, R[$ par : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} q^n x^n$.

   Exprimer $f(x)$ sous la forme d'une fraction rationnelle.

   $\forall x \in]-R, R[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (qx)^n = \frac{1}{1-qx}$

   c. En déduire une expression de la fonction $g : x \longmapsto \frac{1}{(1-qx)^2}$ sous la forme : $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

   Expliciter les coefficients a_n et le rayon de convergence de cette série entière.

   Dérivons l'expression précédente :

   $\frac{q}{(1-qx)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n q^n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) q^{n+1} x^n$

   D'où $\frac{1}{(1-qx)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) q^n x^n$. Le rayon de CV est aussi : $\frac{1}{|q|}$.

2. Soit $p \in]0,1[$. On considère une expérience qui peut mener soit à un succès (avec la probabilité p) soit à un échec (avec la probabilité $1-p$). On suppose que cette expérience peut être tentée autant de fois que l'on souhaite, chaque résultat étant indépendant des autres.

   Enfin, on définit la variable aléatoire X = « nombre de tentatives nécessaires pour obtenir un premier succès ». Ainsi, si la première tentative est un succès, on aura $X = 1$.

   a. Donner la loi de X.

   $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$

   $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X=n) = \underbrace{(1-p)^{n-1}}_{P(\text{échec aux tentatives } 1, 2, \ldots, n-1)} \times p$ P(succès à la tentative n)

b. Déterminer la fonction génératrice de X. Exprimer $G_X(t)$ d'abord sous la forme d'une série entière puis sous la forme d'une fraction rationnelle.

Posons $q = 1-p$. $P(X=n) = (1-q)\,q^{n-1}$

$$G_X(t) = (1-q)\,q^0\,t + (1-q)\,q^1 t^2 + (1-q)\,q^2 t^3 + \dots$$
$$= (1-q)\,t \sum_{n=0}^{+\infty} (qt)^n = \frac{(1-q)\,t}{1-qt}$$

c. En déduire l'espérance et la variance de X.

$$G_X'(t) = (1-q) \times \frac{1\,(1-qt) - t(-q)}{(1-qt)^2} = \frac{1-q}{(1-qt)^2}$$

$$G_X''(t) = (1-q)\left[(1-qt)^{-2}\right]' = (1-q)\left[-2(1-qt)^{-3}(-q)\right]$$
$$= \frac{2q(1-q)}{(1-qt)^3}$$

Donc $E(X) = G_X'(1) = \dfrac{1-q}{(1-q)^2} = \dfrac{1}{1-q} = \dfrac{1}{p}$

$$\mathrm{Var}(X) = G_X''(1) + E(X) - (E(X))^2$$
$$= \frac{2q(1-q)}{(1-q)^3} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}$$
$$= \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{p}{p^2} - \frac{1}{p^2}$$
$$= \frac{2-2p+p-1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

3. On définit la variable aléatoire Y = « nombre de tentatives nécessaires pour obtenir deux succès ».

a. Écrire Y comme une somme de deux variables aléatoires étudiées précédemment.

$$Y = \underbrace{X_1}_{\text{nbr de tentatives avant le 1er succès}} + X_2$$

X_2 → nbr. de tentatives entre le premier et le second succès.

X_1 et X_2 suivent une loi géométrique.

b. En déduire sa fonction génératrice $G_Y(t)$.

$$G_Y(t) = G_{X_1}(t)\,G_{X_2}(t) = \left(\frac{(1-q)t}{(1-qt)}\right)^2 = \frac{(1-q)^2 t^2}{(1-qt)^2}$$

c. Application : en utilisant les résultats précédents, déterminer $P(Y{=}5)$.

D'après 1.c., $\dfrac{1}{(1-qt)^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) q^n t^n$

D'où $G_Y(t) = (1-q)^2 t^2 \times (1 + 2qt + 3q^2t^2 + 4q^3t^3 + \dots)$

Le terme en t^5 est donc $\underbrace{(1-q)^2 \times 4q^3}_{P(Y=5)} t^5$

Exercice 5 (4 points)

Soit X une variable aléatoire entière de fonction génératrice $G_X(t) = a \ln\left(1 - \frac{t}{3}\right)$.

1. Quelle est la valeur de a ?

$G_X(1) = 1 \Rightarrow a \ln\left(\frac{2}{3}\right) = 1 \Rightarrow a = \dfrac{1}{\ln(2/3)}$ (Noter que $a < 0$)

2. En partant de la série géométrique, donner le développement en série entière de $G_X(t)$. Préciser le rayon de convergence et en déduire la loi de X.

Série géométrique : $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$

En intégrant : $-\ln(1-x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} \Rightarrow \ln(1-x) = \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{x^{n+1}}{n+1}$

D'où $G_X(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{1}{\ln(2/3)} \frac{(t/3)^{n+1}}{n+1}$

Finalement, $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X=n) = \dfrac{-1}{\ln(2/3)} \times \dfrac{\frac{1}{3^n}}{n}$

3. Déterminer l'espérance et la variance de X.

$G_X'(t) = \dfrac{1}{\ln(2/3)} \times \dfrac{-1/3}{1-t/3} = \dfrac{-1}{\ln(2/3)} \times \dfrac{1}{3-t} = \dfrac{1}{\ln(3/2)} \times \dfrac{1}{3-t}$

$G_X''(t) = \dfrac{1}{\ln(3/2)} \times \dfrac{1}{(3-t)^2}$

[suite du cadre page suivante]

D'où $E(X) = G'_X(1) = \frac{1}{\ln(3/2)} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2\ln(3/2)}$

$Var(X) = G''_X(1) + E(X) - (E(X))^2$

$= \frac{1}{\ln(3/2)} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2\ln(3/2)} - \frac{1}{4\ln^2(3/2)}$

$= \frac{3}{4\ln(3/2)} - \frac{1}{4\ln^2(3/2)}$

$= \frac{3\ln(3/2) - 1}{4\ln^2(3/2)}$

4. Trouver une fonction f telle que, en posant $Y = f(X)$, on ait : $G_Y(t) = t\,G_X(t)$.

Ecrivons $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ (sans s'occuper des valeurs de a_n)

Alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(X=n) = a_n$.

Si $G_Y(t) = t\,G_X(t)$, alors $G_Y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^{n+1}$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(Y=n+1) = a_n = P(X=n)$

Une variable Y vérifiant cette propriété est $Y = X+1$