

Nom :

Prénom :

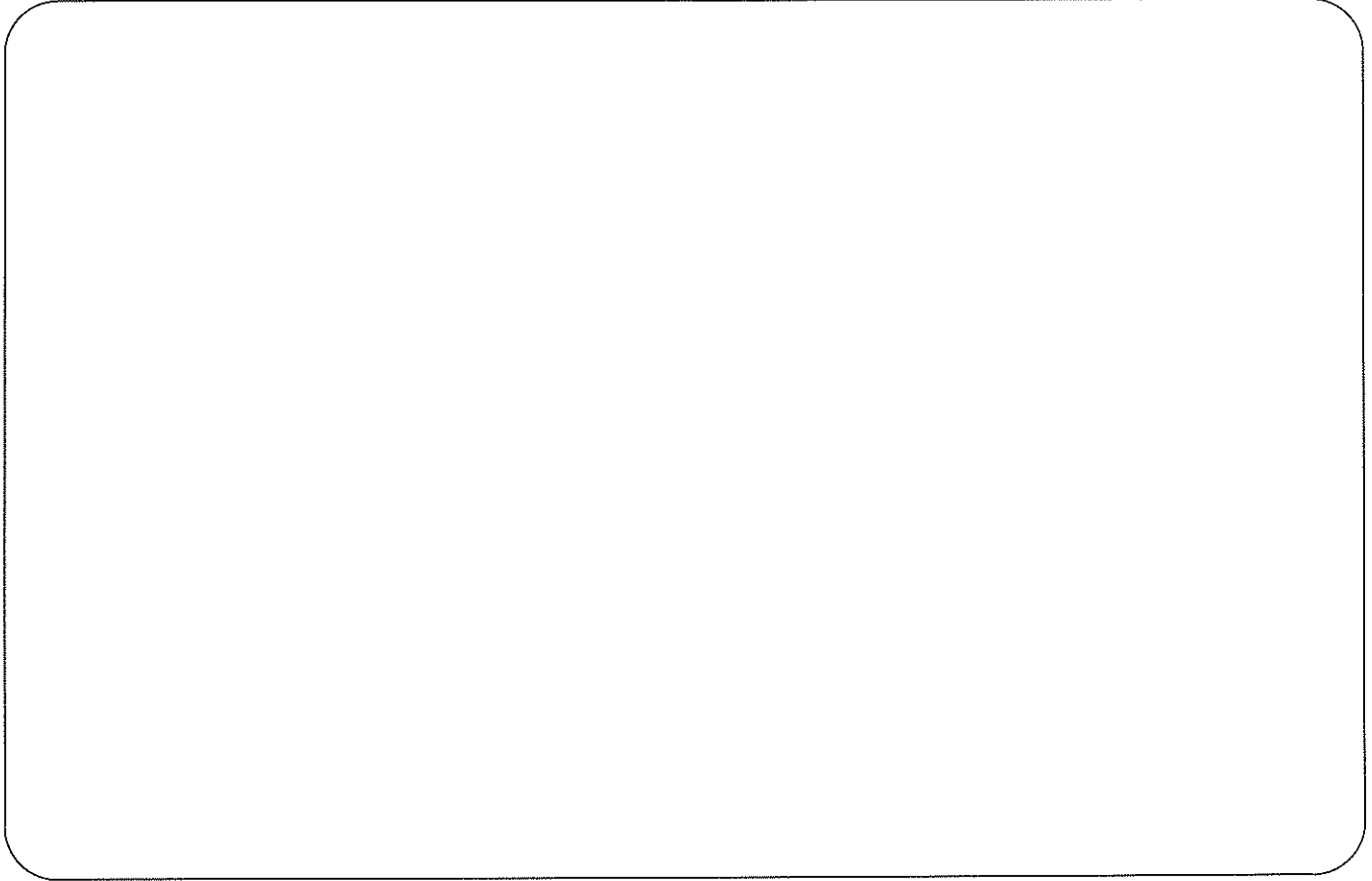
Classe :

Entourer votre professeur de TD : M. Goron / M. Rodot

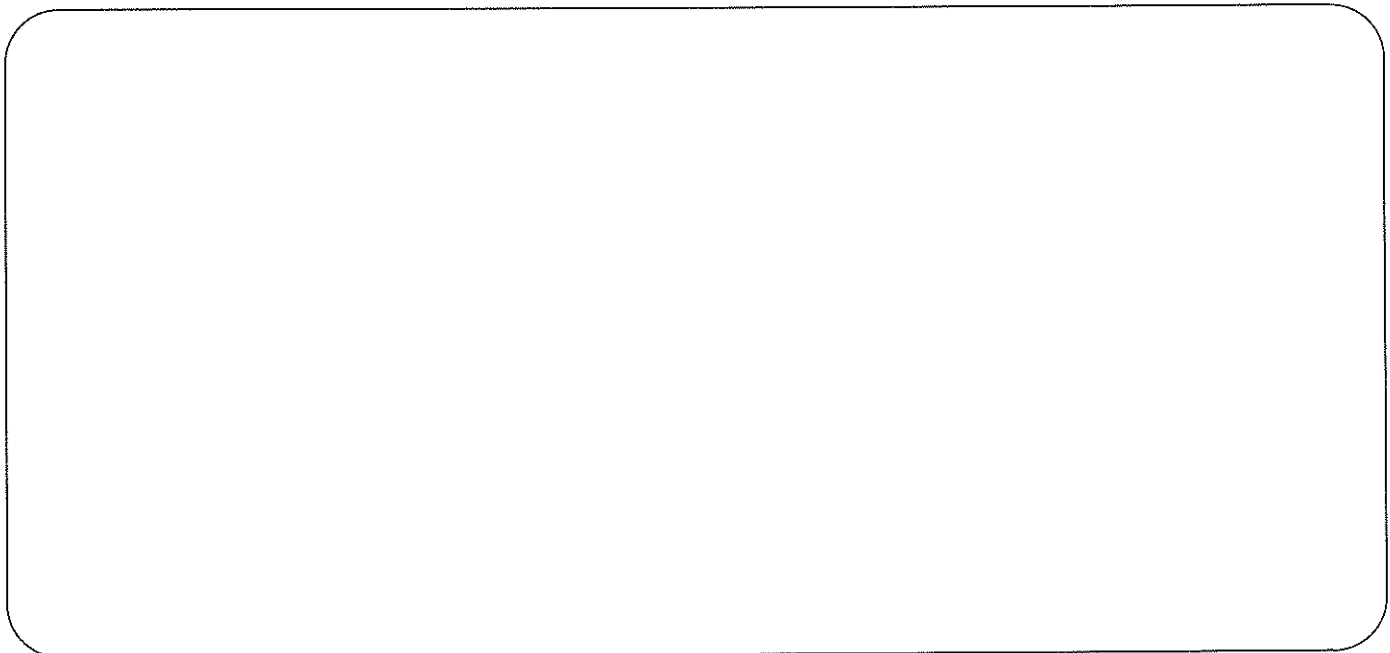
# Contrôle 1

## Exercice 1 (3 points)

1. Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 3 de  $\ln(2 + \sin(x))$ .



2. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \cos\left(\frac{1}{x}\right) \right)^{x^2}$ .



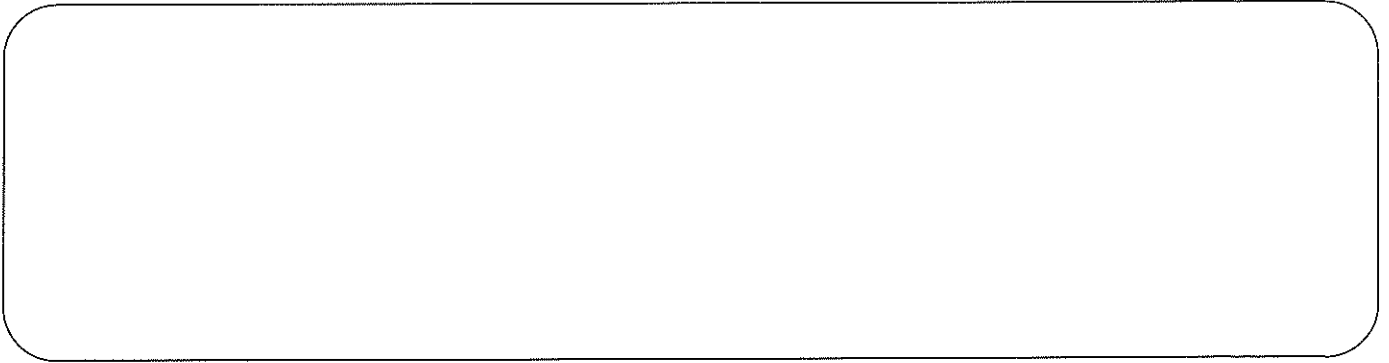
## Exercice 2 (5 points)

1. Via la règle de d'Alembert, déterminer la nature de  $\sum \frac{(n!)^3}{(3n)!}$ .

2. Via un développement limité, déterminer la nature de  $\sum \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$ .

3. Déterminer la nature de  $\sum n^2 e^{-n}$ .

4. Déterminer la nature de  $\sum \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$ .



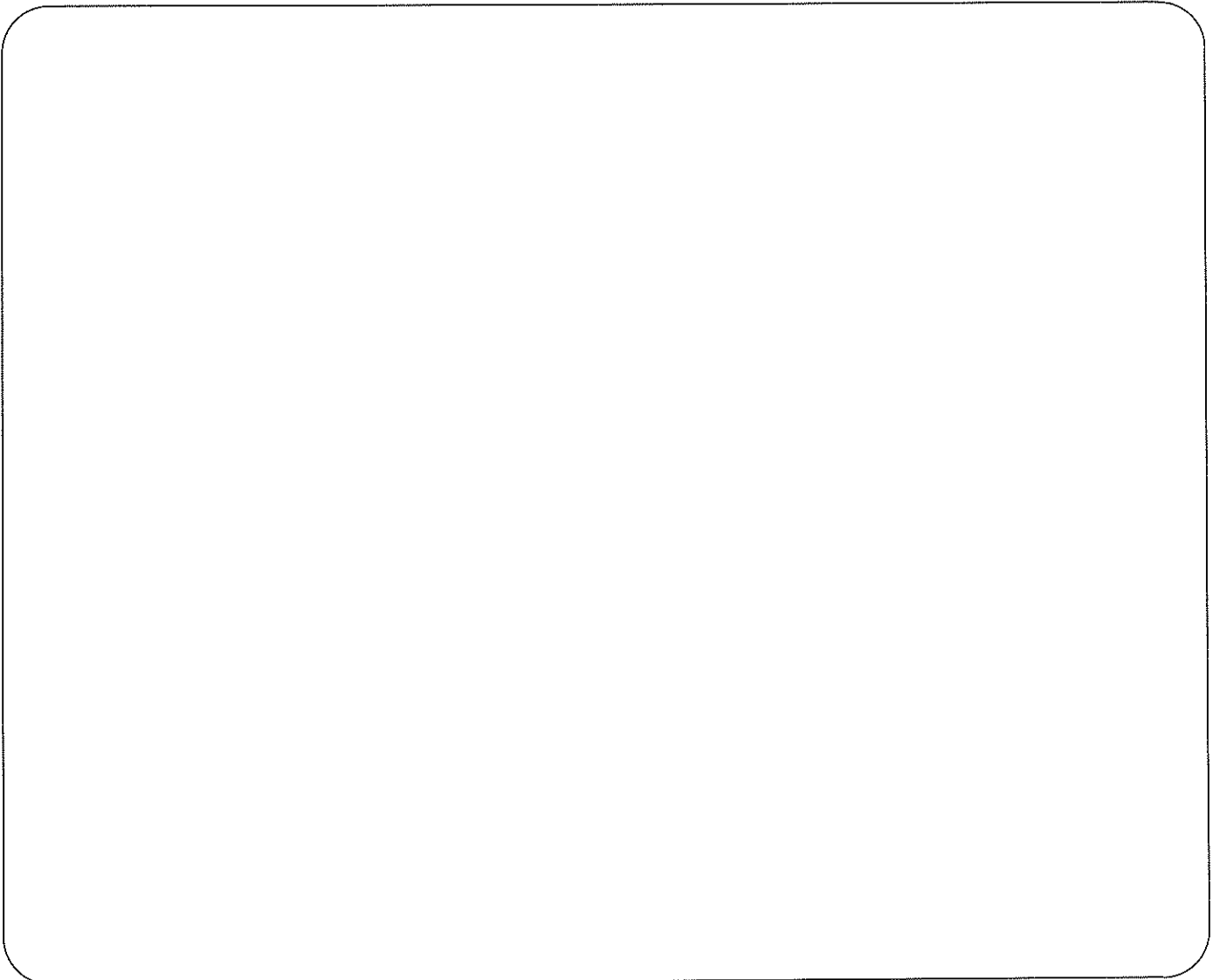
### Exercice 3 (4 points)

On considère la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  par

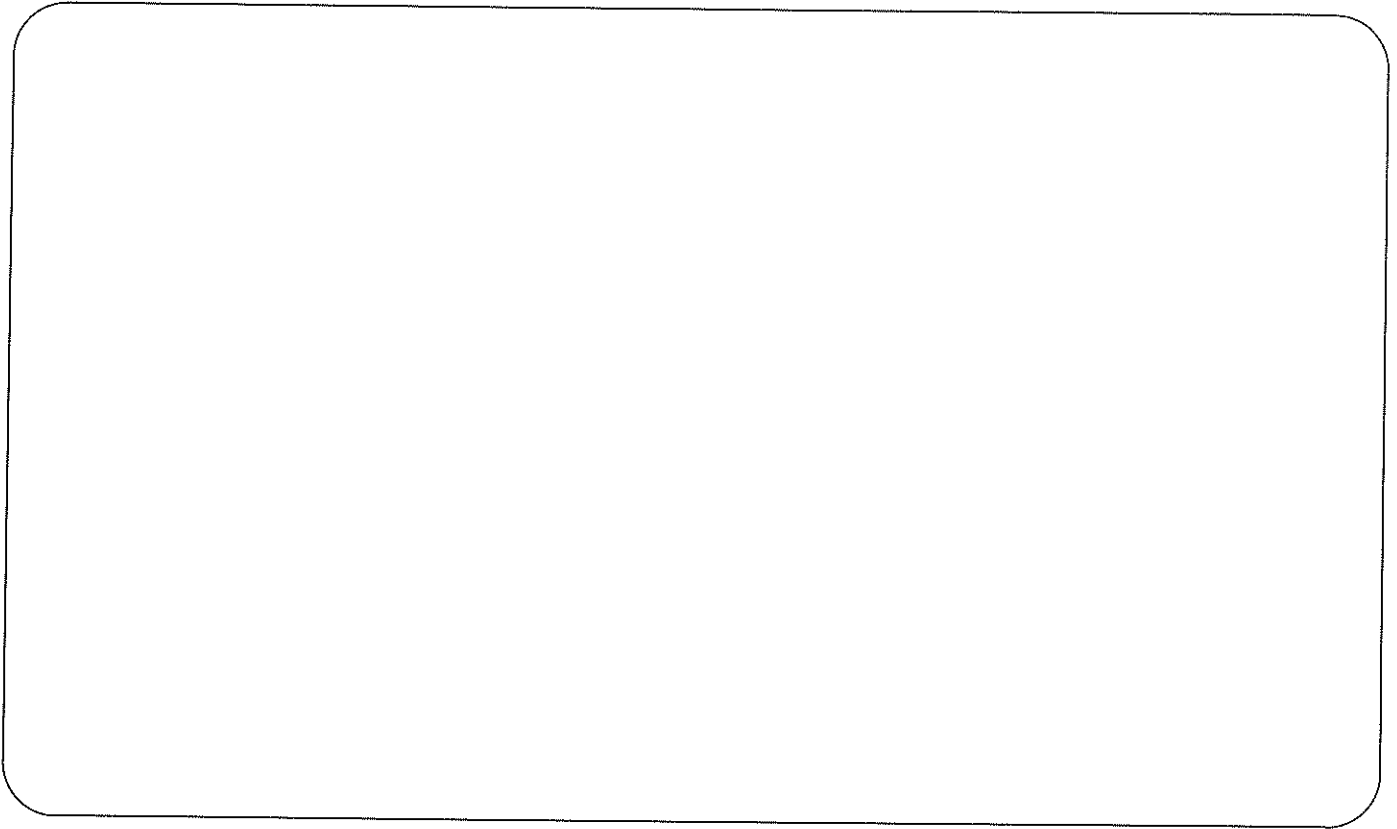
$$u_n = \ln((n-1)!) - \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln(n) + n$$

1. Montrer que

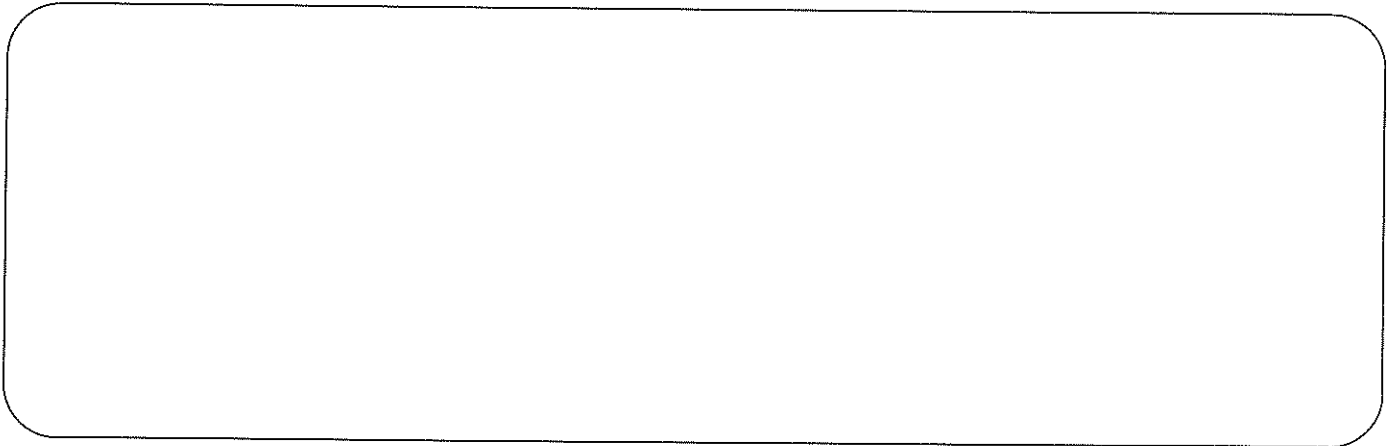
$$u_{n+1} - u_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$



2. Montrer que  $u_{n+1} - u_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{12n^2}$ .



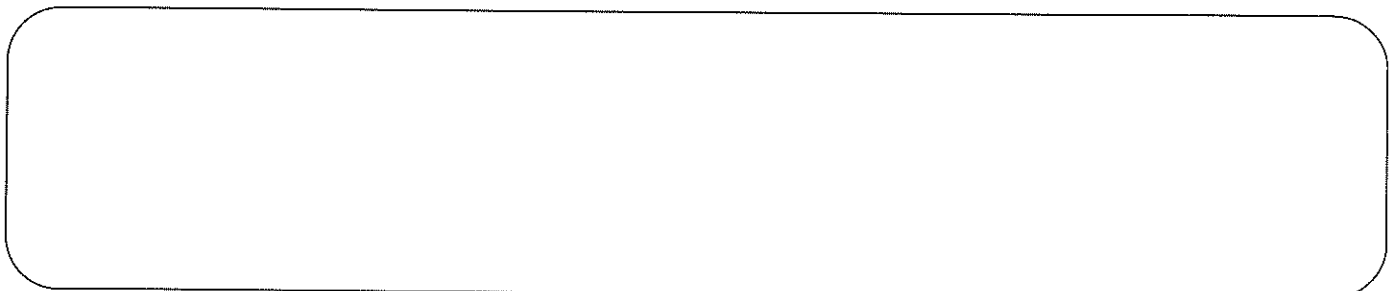
3. En déduire que  $(u_n)$  est convergente.



### Exercice 4 (4 points)

Considérons la suite  $(u_n)$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  par  $u_n = \sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$ .

1. Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n}$ .



2. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \sqrt[n]{n} \left( \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{1/n} - 1 \right)$ .

3. Via un développement limité, déterminer un équivalent de  $\left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{1/n} - 1$  puis de  $u_n$ .

4. En déduire la nature de  $\sum u_n$ .

### Exercice 5 (4 points)

On considère la suite  $(u_n)$  définie pour tout  $n \geq 2$  par  $u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n) - (-1)^n}$ .

1. Quelle est la limite suivante :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\ln^2(n)}$  ?

2. En déduire la nature de  $\sum \frac{1}{\ln^2(n)}$ .

3. Vérifier que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n)} \left(1 - \frac{(-1)^n}{\ln(n)}\right)^{-1}$ .

4. Déterminer  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $u_n = \frac{(-1)^n}{\ln(n)} + \frac{a}{\ln^2(n)} + o\left(\frac{1}{\ln^2(n)}\right)$ .

5. En déduire la nature de  $\sum u_n$ .