EPITA

Mathématiques

Examen PSE (Probabilités et Séries Entières)

Octobre 2024

Durée : 1 heure

Nom :

Prénom :

Classe :

NOTE :

Le barème est sur 20 points.

Consignes :

— Lire l'énoncé entier avant de commencer. Il y a en tout 3 exercices.
— Documents et calculatrices interdits.
— Répondre directement sur les feuilles jointes, dans les espaces prévus. Aucune autre feuille ne sera corrigée.
— Ne pas écrire au crayon de papier.

Exercice 1 : probabilités finies (8 points)

Une entreprise a développé un OCR pour automatiser la lecture des adresses sur le courrier postal. L'OCR n'est cependant pas parfait et, quand il lit une adresse, il a une probabilité $p \in]0,1[$ de se tromper. On suppose que les performances de l'OCR sur des courriers différents sont indépendantes les unes des autres.

Considérons un lot de n courriers ($n \in \mathbb{N}^*$) et la variable aléatoire

$$Y = \text{«nombre total d'erreurs de lecture parmi ces } n \text{ courriers»}$$

1. Pour tout $c \in [\![1,n]\!]$, on définit la variable aléatoire

$$X_c = \begin{cases} 1 & \text{s'il y a une erreur de lecture d'adresse sur ce courrier } c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(a) Soit $c \in [\![1,n]\!]$. Donner la loi de X_c.

....
....
....
....
....
....

(b) En déduire la fonction génératrice G_{X_c} de X_c.

....
....

(c) En utilisant G_{X_c}, calculer l'espérance et la variance de X_c.

....
....
....
....
....
....
....
....
....

2. Étude de la variable aléatoire Y.

(a) Donner en justifiant la fonction génératrice de Y.

....
....
....

(b) En déduire la loi de Y.

....

(c) Calculer l'espérance et la variance de Y.

....

Exercice 2 : séries entières (7 points)

1. Démontrer que la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{2-x}$ peut se mettre sous la forme $f(x) = \alpha \times \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

   Quelles sont les valeurs de α et du rayon de convergence R_1 de cette série entière ?

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

2. Exprimer sous la forme d'une série entière la fonction $x \longmapsto \ln(2-x)$ et donner son rayon de convergence.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

3. Exprimer sous la forme d'une série entière la fonction $x \longmapsto \dfrac{x^3}{(2-x)^2}$ et donner son rayon de convergence.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....[Suite des pointillés page suivante]

4. Trouver le rayon de convergence R_2 de la série entière $\sum \frac{x^n}{n!}$. Justifier votre réponse.

5. Rappeler (sans justifier) une expression simple (à l'aide des fonctions usuelles) de sa fonction somme, définie pour tout $x \in]-R_2, R_2[$ par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

6. En déduire le rayon de convergence et une expression simple de la fonction somme de $\sum \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n}$.

7. Trouver une expression simple de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!} x^{2n}$.

Exercice 3 : probabilités infinies (5 points)

Considérons une variable aléatoire entière X admettant une fonction génératrice de la forme $G_X(t) = \dfrac{at}{1-\frac{t}{3}}$ où $a \in \mathbb{R}$.

1. Quelle est la valeur de a ?

2. En écrivant $G_X(t)$ sous forme d'une série entière, en déduire la loi de X.

3. Calculer l'espérance et la variance de X.

[Suite des pointillés page suivante]