Examen B5/PSE : corrigé

Exercice 1 : probabilités finies (8 points)

Une entreprise a développé un OCR pour automatiser la lecture des adresses sur le courrier postal. L'OCR n'est cependant pas parfait et, quand il lit une adresse, il a une probabilité $p \in]0,1[$ de se tromper. On suppose que les performances de l'OCR sur des courriers différents sont indépendantes les unes des autres.

Considérons un lot de n courriers ($n \in \mathbb{N}^*$) et la variable aléatoire

$$Y = \text{«nombre total d'erreurs de lecture parmi ces } n \text{ courriers»}$$

1. Pour tout $c \in [\![1,n]\!]$, on définit la variable aléatoire $X_c = \begin{cases} 1 & \text{s'il y a une erreur de lecture d'adresse sur ce courrier } c \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

   (a) Soit $c \in [\![1,n]\!]$. Donner la loi de X_c.

   $X_c(\Omega) = \{0,1\}, \qquad P(X_c{=}1) = p \qquad \text{et} \qquad P(X_c{=}0) = 1-p.$

   (b) En déduire la fonction génératrice G_{X_c} de X_c.

   $G_{X_c}(t) = (1-p) + pt.$

   (c) En utilisant G_{X_c}, calculer l'espérance et la variance de X_c.

   Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G'_{X_c}(t) = p \Longrightarrow \mathrm{E}(X) = G'_{X_c}(1) = p.$
   De plus, $G''_{X_c}(t) = 0 \Longrightarrow \mathrm{Var}(X_c) = G''_{X_c}(1) + G'_{X_c}(1) - \big(G'_{X_c}(1)\big)^2 = 0 + p - p^2 = p(1-p).$

2. Étude de la variable aléatoire Y.

   (a) Donner en justifiant la fonction génératrice de Y.

   $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ où les X_c sont indépendants. Ainsi,

   $$G_Y(t) = G_{X_1}(t) \times G_{X_2}(t) \times \cdots \times G_{X_n}(t) = \big((1-p)+pt\big)^n$$

   (b) En déduire la loi de Y.

   Développons $G_Y(t) = \big((1-p)+pt\big)^n$ par la formule du binôme :

   $$G_Y(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1-p)^{n-k} (pt)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1-p)^{n-k} p^k \,.\, t^k$$

   Ainsi, la loi de Y est :

   $$Y(\Omega) = [\![0,n]\!] \qquad \text{et} \qquad \forall k \in [\![0,n]\!],\ P(Y{=}k) = \binom{n}{k}(1-p)^{n-k}p^k$$

   (c) Calculer l'espérance et la variance de Y.

   $Y = X_1 + \cdots + X_n \Longrightarrow \mathrm{E}(Y) = \underbrace{\mathrm{E}(X_1)}_{p} + \cdots + \underbrace{\mathrm{E}(X_n)}_{p} = np.$

   $$\left.\begin{array}{l} Y = X_1 + \cdots + X_n \\ \text{Les } X_c \text{ indépendants} \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathrm{E}(Y) = \underbrace{\mathrm{Var}(X_1)}_{p(1-p)} + \cdots + \underbrace{\mathrm{Var}(X_n)}_{p(1-p)} = np(1-p).$$

Exercice 2 : séries entières (7 points)

1. Démontrer que la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{2-x}$ peut se mettre sous la forme $f(x) = \alpha \times \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{x^n}{2^n}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

   Quelles sont les valeurs de α et du rayon de convergence R_1 de cette série entière ?

   $$f(x) = \frac{1}{2} \times \underbrace{\frac{1}{1-\frac{x}{2}}}_{\text{série géométrique}} = \frac{1}{2} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2^n}.$$

   Donc $\alpha = \dfrac{1}{2}$. De plus, d'après les propriétés de la série géométrique, cette série converge si et seulement si

   $$\left|\frac{x}{2}\right| < 1 \iff |x| < 2$$

   Ainsi, le rayon de convergence est $R_1 = 2$.

2. Exprimer sous la forme d'une série entière la fonction $x \longmapsto \ln(2-x)$ et donner son rayon de convergence.

   Intégrons le résultat de la question précédente :

   $$\int_0^x \frac{1}{2-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^x \frac{t^n}{2^n}\,\mathrm{d}t\right) \Longrightarrow -\ln(2-x) + \ln(2) = \frac{1}{2} \times \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}$$

   D'où

   $$\ln(2-x) = \ln(2) - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}}$$

   Cette série peut aussi se mettre sous le forme

   $$\ln(2-x) = \ln(2) - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n2^n}$$

   Le rayon de convergence n'est pas modifié par l'intégration de la série entière de la question 1. Il vaut $R_1 = 2$.

3. Exprimer sous la forme d'une série entière la fonction $x \longmapsto \dfrac{x^3}{(2-x)^2}$ et donner son rayon de convergence.

   Dérivons la série entière de la question 1 (le rayon de convergence est toujours $R_1 = 2$) :

   $$\left(\frac{1}{2-x}\right)' = \frac{1}{(2-x)^2} = \frac{1}{2} \times \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^{n-1}}{2^n}$$

   Ainsi,

   $$\frac{x^3}{(2-x)^2} = \frac{x^3}{2} \times \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^{n-1}}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^{n+2}}{2^{n+1}}$$

4. Trouver le rayon de convergence R_2 de la série entière $\sum \dfrac{x^n}{n!}$. Justifier votre réponse.

   Utilisons la règle de d'Alembert pour les séries entières :

   $$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

   Donc $R_2 = +\infty$.

5. Rappeler (sans justifier) une expression simple (à l'aide des fonctions usuelles) de sa fonction somme, définie pour tout $x \in]-R_2, R_2[$ par

   $$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

   Pour tout $x \in]-\infty, +\infty[$, $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$.

6. En déduire le rayon de convergence et une expression simple de la fonction somme de $\sum \frac{(-1)^n}{n!}\, x^{2n}$.

   On remarque que $\sum \frac{(-1)^n}{n!}\, x^{2n} = \sum \frac{\left(-x^2\right)^n}{n!}$.

   D'après la question 4, cette série converge pour toute valeur de $-x^2 \in \mathbb{R}$, donc pour toute valeur de $x \in \mathbb{R}$. Son rayon de convergence est donc $+\infty$.

   De plus, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\, x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-x^2\right)^n}{n!} = e^{-x^2}$.

7. Trouver un expression simple de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\, x^{2n}$.

   En posant $p = n-1$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\, x^{2n} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}\left(x^2\right)^{p+1}}{p!} = -x^2 \times \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\left(-x^2\right)^p}{p!} = -x^2 e^{-x^2}$$

Exercice 3 : probabilités infinies (5 points)

Considérons une variable aléatoire entière X admettant une fonction génératrice de la forme $G_X(t) = \frac{at}{1-\frac{t}{3}}$ où $a \in \mathbb{R}$.

1. Quelle est la valeur de a ?

   $G_X(1) = 1 \Longrightarrow \frac{a}{\frac{2}{3}} = 1 \Longrightarrow a = \frac{2}{3}$.

2. En écrivant $G_X(t)$ sous forme d'une série entière, en déduire la loi de X.

   $G_X(t) = \frac{2t}{3} \times \underbrace{\frac{1}{1-\frac{t}{3}}}_{\text{série géométrique}} = \frac{2t}{3} \times \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{3^n}$.

   Ainsi, $G_X(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 2\frac{t^{n+1}}{3^{n+1}} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{2t^p}{3^p}$ (en posant $p = n+1$).

   La loi de X est donc donnée par

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \qquad \text{et} \qquad \forall p \in \mathbb{N}^*,\ P(X{=}p) = \frac{2}{3^p}$$

3. Calculer l'espérance et la variance de X.

   - $G'_X(t) = \frac{\frac{2}{3}}{\left(1-\frac{t}{3}\right)^2} \Longrightarrow \mathrm{E}(X) = G'_X(1) = \frac{\frac{2}{3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{3}{2}$.
   - $G''_X(t) = \frac{2}{3} \times \left(\left(1-\frac{t}{3}\right)^{-2}\right)' = \frac{2}{3} \times (-2)\left(1-\frac{t}{3}\right)^{-3} \times \left(-\frac{1}{3}\right)$ en utilisant $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$.

     Donc $G''_X(t) = \frac{4}{9} \times \frac{1}{\left(1-\frac{t}{3}\right)^3} \Longrightarrow G''_X(1) = \frac{4}{9} \times \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^3} = \frac{3}{2}$.

     Ainsi, $\mathrm{Var}(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - \left(G'_X(1)\right)^2 = \frac{3}{2} + \frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$.