EPITA

Mathématiques

Examen ASN (Analyse et Séries Numériques)

Octobre 2024

Durée : 2 heures

Nom :

Prénom :

Classe :

NOTE :

Le barème est sur 40 points. La note se ramenée à une note sur 20 par une simple division par 2.

Consignes :

- Lire l'énoncé entier avant de commencer. Il y a en tout 5 exercices.
- Si vous ne parvenez pas à démontrer un résultat donné explicitement dans l'énoncé d'une question, vous pouvez admettre ce résultat et continuer l'exercice.
- Documents et calculatrices interdits.
- Répondre directement sur les feuilles jointes, dans les espaces prévus. Aucune autre feuille ne sera corrigée.
- Ne pas écrire au crayon de papier.

Exercice 1 (9 points)

1. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{\sin(n)}{n^2}$. Justifier proprement.

2. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{n^3}{3^{(n^2)}}$. Justifier proprement.

3. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n\, n}{e^n}$. Justifier proprement.

Exercice 2 (6 points)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Le but de l'exercice est de déterminer la nature de $\sum \dfrac{\ln(n)}{n^a}$ en fonction de la valeur de α.

1. Montrer que pour tout $\beta < \alpha$, $\dfrac{\ln(n)}{n^\alpha} = o\left(\dfrac{1}{n^\beta}\right)$.

2. En déduire que si $\alpha > 1$, $\sum \frac{\ln(n)}{n^\alpha}$ converge.

3. Supposons maintenant que $\alpha \leqslant 1$. Quelle est alors la nature de $\sum \frac{\ln(n)}{n^\alpha}$?

Exercice 3 (9 points)

Considérons la série de terme général $u_n = \sqrt{n}\left(\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{3/2} - 1\right)$.

1. Trouver $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que, au voisinage de $+\infty$, $u_n = \frac{(-1)^n a}{\sqrt{n}} + \frac{b}{n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$

2. En déduire la nature de $\sum u_n$.

[Suite des pointillés page suivante]

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

Exercice 4 : un peu de cours et une démonstration (8 points)

Soit (u_n) une suite alternée.

1. Rappeler la définition de «la suite (u_n) est alternée».

....
....
....
....

2. Énoncer le critère spécial des séries alternées sur la nature de $\sum u_n$.

....
....
....
....
....
....

3. Démontrer cette propriété.

....
....
....
....
....
....[Suite des pointillés page suivante]

Exercice 5 (8 points)

Considérons la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ et la suite (S_n) de ses sommes partielles.

1. Quelle est la nature de $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$? Que peut-on dire de la limite de (S_n) en $+\infty$?

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

2. Le but des questions suivantes est d'étudier le comportement de (S_n) au voisinage de $+\infty$. Pour cela, on considère la série $\sum v_n$ de terme général

$$v_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)$$

   et la suite (T_n) de ses sommes partielles.

   (a) Rappeler le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\sqrt{1+x}$ et en déduire celui de $\sqrt{1-x}$.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

   (b) Trouver un équivalent de v_n et en déduire que $\sum v_n$ converge. Dans la suite, on notera $\ell = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....[Suite des pointillés page suivante]

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer T_n en fonction de S_n et de n.

(d) En déduire que $S_n \sim 2\sqrt{n}$.