Examen B5/ASN : corrigé

Exercice 1 (9 points)

1. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{\sin(n)}{n^2}$. Justifier proprement.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n| = \left|\dfrac{\sin(n)}{n^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

   Or $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge, donc $\sum |u_n|$ converge. Ainsi, $\sum u_n$ converge absolument donc converge.

2. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{n^3}{3^{(n^2)}}$. Justifier proprement.

   Appliquons la règle de Cauchy : $\sqrt[n]{u_n} = \dfrac{n^{3/n}}{3^n}$. Or $n^{3/n} = \exp\left(\frac{3}{n}\ln(n)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^0 = 1$ car $\dfrac{\ln(n)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

   Donc $\sqrt[n]{u_n} \sim \dfrac{1}{3^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Comme $0 < 1$, $\sum u_n$ converge d'après la règle de Cauchy.

3. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n\, n}{e^n}$. Justifier proprement.

   Appliquons la règle de d'Alembert à $\sum |u_n|$, qui est une série à termes strictement positifs.

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{n+1}{e^{n+1}} \times \frac{e^n}{n} = \underbrace{\frac{n+1}{n}}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}1} \times \frac{e^n}{e^{n+1}} \sim \frac{1}{e}$$

   Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{1}{e} < 1$ et $\sum |u_n|$ converge d'après la règle de d'Alembert.

   Ainsi, $\sum u_n$ converge absolument donc converge.

Exercice 2 (6 points)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Le but de l'exercice est de déterminer la nature de $\sum \dfrac{\ln(n)}{n^\alpha}$ en fonction de la valeur de α.

1. Montrer que pour tout $\beta < \alpha$, $\dfrac{\ln(n)}{n^\alpha} = o\left(\dfrac{1}{n^\beta}\right)$.

   Pour tout $\beta < \alpha$, on a :

$$\frac{\frac{\ln(n)}{n^\alpha}}{\frac{1}{n^\beta}} = n^\beta \times \frac{\ln(n)}{n^\alpha} = \frac{\ln(n)}{n^{\alpha-\beta}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

   d'après les croissances comparées, car $\alpha - \beta > 0$. Donc $\dfrac{\ln(n)}{n^\alpha} = o\left(\dfrac{1}{n^\beta}\right)$.

2. En déduire que si $\alpha > 1$, $\sum \dfrac{\ln(n)}{n^\alpha}$ converge.

   Si $\alpha > 1$, prenons pour β une valeur quelconque dans $]1, \alpha[$, par exemple $\beta = \dfrac{1+\alpha}{2}$. On a alors :

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\ln(n)}{n^\alpha} = o\left(\dfrac{1}{n^\beta}\right) & \text{car } \beta < \alpha \\ \sum \dfrac{1}{n^\beta} \text{ converge} & \text{car } \beta > 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \sum \frac{\ln(n)}{n^\alpha} \text{ converge}$$

3. Supposons maintenant que $\alpha \leqslant 1$. Quelle est alors la nature de $\sum \frac{\ln(n)}{n^\alpha}$?

   Dans ce cas, pour tout $n > e$, $\ln(n) > 1 \Longrightarrow \frac{\ln(n)}{n^\alpha} > \frac{1}{n^\alpha} \geqslant 0$.

   Or $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge, donc $\sum \frac{\ln(n)}{n^\alpha}$ diverge elle aussi.

Exercice 3 (9 points)

Considérons la série de terme général $u_n = \sqrt{n}\left(\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{3/2} - 1\right)$.

1. Trouver $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que, au voisinage de $+\infty$, $u_n = \frac{(-1)^n a}{\sqrt{n}} + \frac{b}{n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$

   Rappelons le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $(1 + x)^{3/2}$:

   $$(1 + x)^{3/2} = 1 + \frac{3}{2}x + \frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2} - 1\right)}{2!}x^2 + o(x^2) = 1 + \frac{3x}{2} + \frac{3x^2}{8} + o(x^2)$$

   Ainsi,

   $$u_n = \sqrt{n}\left(1 + \frac{3}{2}.\frac{(-1)^n}{n} + \frac{3}{8}.\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1\right) = \frac{3}{2}.\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{3}{8}.\frac{1}{n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

   Donc $a = \frac{3}{2}$ et $b = \frac{3}{8}$.
2. En déduire la nature de $\sum u_n$.

   Posons $u_n = v_n + w_n$ où $v_n = \frac{3}{2}.\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $w_n = \frac{3}{8}.\frac{1}{n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$.

   - $\sum v_n$ converge en vertu du CSSA. En effet, (v_n) est alternée, $\big(|v_n|\big) = \left(\frac{3}{2\sqrt{n}}\right)$ est décroissante et converge vers 0.
   - Au voisinage de $+\infty$, $w_n \sim \frac{3}{8n^{3/2}} > 0$. Les séries $\sum w_n$ et $\sum \frac{3}{8n^{3/2}}$ sont donc de mêmes natures. Or $\sum \frac{3}{8n^{3/2}}$ est une série de Riemann convergente, donc $\sum w_n$ converge.

   Finalement, $\sum u_n$ converge car c'est la somme de deux séries convergentes.

Exercice 4 : un peu de cours et une démonstration (8 points)

Soit (u_n) une suite alternée.

1. Rappeler la définition de «la suite (u_n) est alternée».

   La suite (u_n) est alternée si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \times u_{n+1} \leqslant 0$.

2. Énoncer le critère spécial des séries alternées sur la nature de $\sum u_n$.

   Si la série répond aux trois conditions :
   - (u_n) est alternée
   - $\big(|u_n|\big)$ est décroissante
   - (u_n) converge vers 0

   alors $\sum u_n$ converge.

3. Démontrer cette propriété.

   Si la suite (u_n) est alternée, alors il existe une suite (a_n) positive telle que

   $$(u_n) = \Big((-1)^n a_n\Big) \qquad \text{ou} \qquad (u_n) = \Big(-(-1)^n a_n\Big)$$

   Quitte à remplacer (u_n) par $(-u_n)$, nous allons supposer que $(u_n) = \Big((-1)^n a_n\Big)$. La suite positive (a_n) est en fait la suite $(|u_n|)$. D'après les hypothèses du théorème, elle est donc décroissante et converge vers 0.

Notons (S_n) la suite des sommes partielles de $\sum u_n$: pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + (-1)^n a_n$$

Dans une première étape, montrons que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

(a) Monotonie de (S_{2n}) : cette suite contient les termes de rangs pairs de (S_n). Le terme suivant S_{2n} est donc $S_{2(n+1)} = S_{2n+2}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} S_{2n} & = & a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + a_{2n} \\ S_{2(n+1)} & = & a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + a_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2} \\ \hline S_{2(n+1)} - S_{2n} & = & -a_{2n+1} + a_{2n+2} \end{array} \right.$$

Mais comme (a_n) est décroissante, $-a_{2n+1} + a_{2n+2}$ est négatif. La suite (S_{2n}) est donc décroissante.

(b) Monotonie de (S_{2n+1}) : cette suite contient les termes de rangs impairs de (S_n). Le terme suivant S_{2n+1} est donc $S_{2(n+1)+1} = S_{2n+3}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} S_{2n+1} & = & a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + a_{2n} - a_{2n+1} \\ S_{2(n+1)+1} & = & a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + a_{2n} - a_{2n+1} + a_{2n+2} - a_{2n+3} \\ \hline S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} & = & a_{2n+2} - a_{2n+3} \end{array} \right.$$

Mais comme (a_n) est décroissante, $a_{2n+2} - a_{2n+3}$ est positif. La suite (S_{2n+1}) est donc croissante.

(c) Étude de $S_{2n+1} - S_{2n}$: pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} S_{2n} & = & a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + a_{2n} \\ S_{2n+1} & = & a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \cdots + a_{2n} - a_{2n+1} \\ \hline S_{2n+1} - S_{2n} & = & -a_{2n+1} \end{array} \right.$$

Comme (a_n) converge vers 0, $(S_{2n+1} - S_{2n})$ converge aussi vers 0.

Ainsi, les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. Elles convergent donc toutes les deux et admettent une même limite $\ell \in \mathbb{R}$. Mais alors,

$$\left. \begin{array}{ccc} S_{2n} & \xrightarrow[n\to+\infty]{} & \ell \\ S_{2n+1} & \xrightarrow[n\to+\infty]{} & \ell \end{array} \right\} \Longrightarrow S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$$

Ce qui montre que (S_n) converge et donc que $\sum u_n$ converge.

Exercice 5 (8 points)

Considérons la série $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et la suite (S_n) de ses sommes partielles.

1. Quelle est la nature de $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$? Que peut-on dire de la limite de (S_n) en $+\infty$?

   C'est une série de Riemann avec $\alpha = \dfrac{1}{2} \leqslant 1$. La série est donc divergente. Comme de plus elle est à termes positifs, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

2. Le but des questions suivantes est d'étudier le comportement de (S_n) au voisinage de $+\infty$. Pour cela, on considère la série $\sum v_n$ de terme général

$$v_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)$$

   et la suite (T_n) de ses sommes partielles.

   (a) Rappeler le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\sqrt{1+x}$ et en déduire celui de $\sqrt{1-x}$.

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2 + o(x^2) = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$$

   En remplaçant x par $-x$, on obtient : $\sqrt{1-x} = 1 - \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + o(x^2)$

(b) Trouver un équivalent de v_n et en déduire que $\sum v_n$ converge. Dans la suite, on notera $\ell = \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$.

On a : $v_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}\left(1 - \sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)$.

D'après la question précédente, on peut donc écrire :

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}\left(1 - \left(1 - \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}\left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{4n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \\ &= -\frac{1}{4n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, $v_n \sim -\dfrac{1}{4n^{3/2}} < 0$.

$\sum v_n$ a donc même nature que $\sum -\dfrac{1}{4n^{3/2}}$, qui est une série de Riemann convergente. Ainsi, $\sum v_n$ converge.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer T_n en fonction de S_n et de n.

$$\begin{aligned} T_n &= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1}} - 2\left(\sqrt{1}-\sqrt{0}\right)}_{v_1} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} - 2\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)}_{v_2} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} - 2\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)}_{v_n} \\ &= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}}_{S_n} \underbrace{-2\left(\sqrt{1}-\sqrt{0}\right) - 2\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right) - \cdots - 2\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)}_{-2\sqrt{n} \text{ (par télescopage)}} \end{aligned}$$

Ainsi, $T_n = S_n - 2\sqrt{n}$.

(d) En déduire que $S_n \sim 2\sqrt{n}$.

On sait d'une part, d'après 2.b., que (T_n) converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$. On peut donc écrire $T_n = \ell + o(1)$.

D'autre part, d'après 2.c., $S_n = 2\sqrt{n} + T_n$.

Finalement, $S_n = 2\sqrt{n} + \underbrace{\ell + o(1)}_{o(\sqrt{n})} \Longrightarrow S_n \sim 2\sqrt{n}$.