



Examen Physique : Mécanique quantique

Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés. Le barème est donné à titre indicatif.
Réponses exclusivement sur le sujet. Si vous manquez de place, vous pouvez utiliser le verso des pages.

Exercice 1. Questions de cours (5 points – pas de points négatifs pour le QCM)

Document 1 : Niveaux d'énergie associés à l'atome d'hydrogène

E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_{∞}
-13,6 eV	-3,4 eV	-1,51 eV	-0,850 eV	-0,54 eV	-0,37 eV	0 eV

Le document 1 est utile pour les questions 1 à 4.

- Pour passer du niveau 4 au niveau 3 :
 - L'électron a besoin de recevoir de l'énergie sous forme de photon.
 - L'électron cède de l'énergie sous forme de photon.
- L'énergie à fournir pour passer de l'état fondamental à l'orbite $n = 5$ est égale à :
 - 13,06 eV
 - 12,06 eV
 - 13,06 eV
 - 14,14 eV
- La longueur d'onde correspondant à une transition de l'état $n = 3$ vers l'état $n' = 2$ vaut :
 - $\lambda = hc |\Delta E_{3 \rightarrow 2}|$
 - $\lambda = hc \Delta E_{3 \rightarrow 2}$
 - $\lambda = \frac{hc}{|\Delta E_{3 \rightarrow 2}|}$
 - $\lambda = \frac{hc}{\Delta E_{3 \rightarrow 2}}$
- Si on fournit une énergie de 14 eV à l'électron dans son état fondamental,
 - Rien ne se passe
 - L'atome est ionisé, l'électron s'échappe avec une vitesse non nulle
 - L'électron a une énergie cinétique de 0,4 eV
 - L'électron a une énergie cinétique de -0,4 eV
- Le spectre du rayonnement d'un corps noir est le graphe de :
 - La densité d'énergie rayonnée en fonction de la température T .
 - La température T en fonction de la densité d'énergie rayonnée.
 - La densité d'énergie rayonnée en fonction de la longueur d'onde λ .
 - Aucune de ces réponses.

Exercice 2 : Modèle de Bohr (6 points)

Les hydrogénoïdes sont des ions formés à partir d'atome ayant perdu tous leurs électrons sauf un. Ils sont composés de Z protons ayant chacun une charge $+q$, formant le noyau, et d'un électron de masse m et de charge $-q$. Le modèle de Bohr, développé pour étudier l'atome d'hydrogène, peut aussi être utilisé pour étudier les hydrogénoïdes. Le modèle repose sur trois postulats :

- Considérés comme ayant un mouvement circulaire uniforme de rayon r à une vitesse v , les électrons sont supposés présents sur des orbites stables, des « couches » successives correspondant chacune à un niveau d'énergie de l'électron. L'accélération est centripète est vaut : $a = v^2/r$
- L'électron présent sur une couche n peut passer à une couche n' en absorbant ou en émettant un photon, d'énergie fixée, quantifiée hc/λ , où h est la constante de Planck, c la célérité de la lumière dans le vide, et λ la longueur d'onde du photon
- Le moment cinétique de l'électron est quantifié, ce qui se traduit par la relation $mrv = n\hbar$, où n est le numéro de la couche atomique.

1. Quelle est la norme de la force de Coulomb subit par l'électron dans le cas d'un hydrogénoïde ? On posera $e^2=kq^2$. (où k est la constante de Coulomb) Donner le résultat en fonction de Z , e et r . (1pt)

2. Appliquer le principe fondamental de la dynamique à l'électron, pour l'hydrogénoïde, afin de déterminer l'expression de mv^2 en fonction de Z , e et m . (1,5pts)

3. En utilisant l'expression contenue dans le troisième postulat du modèle de Bohr ainsi que l'expression que vous venez de trouver, établir un système de deux équations puis exprimer les rayons r_n des orbites successives accessibles à l'électron en fonction de leur nombre quantique n , c'est-à-dire le numéro de la couche électronique, de m , e et Z (2pts)

4. Quel est le plus petit rayon possible pour l'ion hélium ($Z=2$) et l'ion lithium ($Z=3$) ? On donne $\frac{\hbar^2}{me^2} = 5.10^{-11} m$. Commenter la vraisemblance du résultat. (0,5pt)

5. L'énergie de l'électron d'un hydrogénoïde est donnée par :

$$E_n = \frac{Z^2 m e^4}{2 \hbar^2 n^2} = 13,6 \frac{Z^2}{n^2} (eV)$$

Quelle est l'énergie fondamentale dans le cas de l'ion Hélium et de l'ion Lithium ? Les valeurs expérimentales sont respectivement 54.42 eV et 122.45 eV. Commenter la vraisemblance du résultat en comparant l'énergie d'ionisation de l'hydrogène, de l'ion hélium et de l'ion lithium. (1pt)

Exercice 3 : Boite quantique 1D et 2D (9pts)

I. Particule dans une boite 1D :

Document 1 : Niveaux d'énergie associés à l'atome d'hydrogène

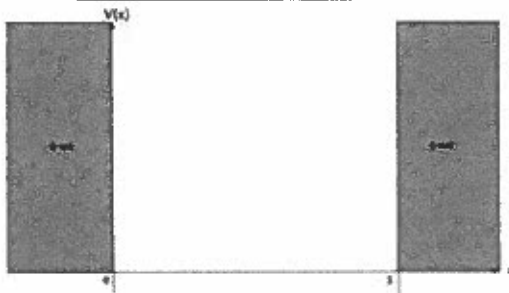


Fig. 1 : Puits de potentiel infini de largeur L

Dans cette première partie, on étudie une particule piégée dans une boîte à une dimension et de longueur L, modélisée de la manière suivante (voir schéma ci-contre).

Le potentiel V vaut :

- $+\infty$ en dehors de $[0; L]$
- 0 pour $x \in [0; L]$

1. Pour $x \in [0; L]$, donner l'équation de Schrödinger vérifiée par la fonction d'onde en fonction de la constante de Planck h , de la masse m et de l'énergie E de la particule. (1pt)

Les solutions générales $\psi(x)$ de l'équation de Schrödinger pour $x \in [0; L]$ sont de la forme :

$$\psi(x) = A \cdot \sin(kx) + B \cdot \cos(kx)$$

Avec A et B des constantes à déterminer.

2. Quelles sont les conditions aux limites $\psi(0)$ et $\psi(L)$? (0,5pt)

3. Utiliser la condition concernant $\psi(0)$ pour déterminer une des constantes. (0,5pt)

4. Utiliser la condition concernant $\psi(L)$ afin de montrer qu'il y a quantification. Déterminer la condition à vérifier par k . (1pt)

On donne la relation suivante :

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

5. Montrer que l'énergie est elle aussi quantifiée. Déterminer l'expression des niveaux d'énergies en en fonction de \hbar , n , L et m . (1 pt)

Intéressons-nous maintenant à une particule piégée dans une boîte à deux dimensions. La modélisation est similaire, et les solutions obtenues sont du type :

$$\psi_{n_x, n_y}(x, y) = \sqrt{\frac{4}{a \cdot b}} \sin\left(\frac{n_x \cdot \pi \cdot x}{a}\right) \sin\left(\frac{n_y \cdot \pi \cdot y}{b}\right) \quad \text{et} \quad E_{n_x, n_y} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left(\frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} \right)$$

6. A partir de maintenant, et pour toutes les questions suivantes, nous considérerons le cas où $a=b=L$, donner l'expression du plus petit niveau d'énergie, noté E_{\min} . (1pt)

7. En quoi ce résultat est surprenant par rapport à la mécanique classique ? (1pt)

8. Que peut-on dire des niveaux d'énergies (2,1) et (1,2). Comment appelle-t-on cette situation ? (2pts)

9. Donner l'expression du sixième niveau d'énergie en fonction de E_{\min} . Pour quel couple (n_x, n_y) est-il atteint ? (1pts)