Examen Physique : *Mécanique quantique*

Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés. Le barème est donné à titre indicatif. **Réponses exclusivement sur le sujet. Si vous manquez de place, vous pouvez utiliser le verso des pages.**

Exercice 1. Questions de cours (5 points – pas de points négatifs pour le QCM)

Document 1 : Niveaux d'énergie associés à l'atome d'hydrogène

E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6	E_∞
$-13{,}6\ eV$	$-3{,}4\ eV$	$-1{,}51\ eV$	$-0{,}850\ eV$	$-0{,}54\ eV$	$-0{,}37\ eV$	$0\ eV$

Le document 1 est utile pour les questions 1 à 4.

1. **Pour passer du niveau 4 au niveau 3 :**
   a. L'électron a besoin de recevoir de l'énergie sous forme de photon.
   b. L'électron cède de l'énergie sous forme de photon.

2. **L'énergie à fournir pour passer de l'état fondamental à l'orbite n = 5 est égale à :**
   a. 13,06 eV
   b. 12,06 eV
   c. -13,06 eV
   d. 14,14 eV

3. **La longueur d'onde correspondant à une transition de l'état n = 3 vers l'état n' = 2 vaut :**
   a. $\lambda = hc\ |\Delta E_{3\to 2}|$
   b. $\lambda = hc\ \Delta E_{3\to 2}$
   c. $\lambda = \frac{hc}{|\Delta E_{3\to 2}|}$
   d. $\lambda = \frac{hc}{\Delta E_{3\to 2}}$

4. **Si on fournit une énergie de 14 eV à l'électron dans son état fondamental,**
   a. Rien ne se passe
   b. L'atome est ionisé, l'électron s'échappe avec une vitesse non nulle
   c. L'électron à une énergie cinétique de 0,4 eV
   d. L'électron à une énergie cinétique de -0,4 eV

5. **Le spectre du rayonnement d'un corps noir est le graphe de :**
   a. La densité d'énergie rayonnée en fonction de la température T.
   b. La température T en fonction de la densité d'énergie rayonnée.
   c. La densité d'énergie rayonnée en fonction de la longueur d'onde λ.
   d. Aucune de ces réponses.

Exercice 2 : Modèle de Bohr (6 points)

Les hydrogénoïdes sont des ions formés à partir d'atome ayant perdu tous leurs électrons sauf un. Ils sont composés de **Z** protons ayant chacun une charge **+q**, formant le noyau, et d'un électron de masse **m** et de charge **-q**. Le modèle de Bohr, développé pour étudier l'atome d'hydrogène, peut aussi être utilisé pour étudier les hydrogénoïdes. Le modèle repose sur trois postulats :

- Considérés comme ayant un mouvement circulaire uniforme de rayon **r** à une vitesse **v**, les électrons sont supposés présents sur des orbites stables, des « couches » successives correspondant chacune à un niveau d'énergie de l'électron. L'accélération est centripète est vaut : $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{v}^2/\boldsymbol{r}$

- L'électron présent sur une couche n peut passer à une couche n'en absorbant ou en émettant un photon, d'énergie fixée, quantifiée $\boldsymbol{hc/\lambda}$, où **h** est la constante de Planck, **c** la célérité de la lumière dans le vide, et $\boldsymbol{\lambda}$ la longueur d'onde du photon

- Le moment cinétique de l'électron est quantifié, ce qui se traduit par la relation $\boldsymbol{mrv} = \boldsymbol{n\hbar}$, où n est le numéro de la couche atomique.

1. Quelle est la norme de la force de Coulomb subit par l'électron dans le cas d'un hydrogénoïde ? On posera $\mathbf{e^2 = kq^2}$. (où **k** est la constante de Coulomb) Donner le résultat en fonction de **Z, e** et **r**. (1pt)

$$F = \frac{Ze^2}{r^2}$$

2. Appliquer le principe fondamental de la dynamique à l'électron, pour l'hydrogénoïde, afin de déterminer l'expression de mv^2 en fonction de **Z, e** et **m**. (1,5pts)

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\frac{Ze^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

3. En utilisant l'expression contenue dans le troisième postulat du modèle de Bohr ainsi que l'expression que vous venez de trouver, établir un système de deux équations puis exprimer les rayons $\boldsymbol{r_n}$ des orbites successives accessibles à l'électron en fonction de leur nombre quantique **n**, c'est-à-dire le numéro de la couche électronique, de **m**, **e** et **Z** (2pts)

$$mv = \frac{n\hbar}{r} \quad soit \quad (mv)^2 = \frac{n^2\hbar^2}{r^2}$$

$$\frac{Ze^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad soit \quad (mv)^2 = \frac{Zme^2}{r}$$

$$\frac{Zme^2}{r} = \frac{n^2\hbar^2}{r^2} \quad d'où \quad r = \frac{n^2\hbar^2}{Zme^2}$$

4. Quel est le plus petit rayon possible pour l'ion hélium (Z=2) et l'ion lithium (Z=3) ? On donne $\frac{\hbar^2}{me^2} = 5.10^{-11}\ m$. Commenter la vraisemblance du résultat. (0,5pt)

$$r(He) = \frac{n^2\hbar^2}{Zme^2} = 5.10^{-11}.\frac{1}{2} = 2{,}5.10^{-11}m$$

$$r(Li) = \frac{n^2\hbar^2}{Zme^2} = 5.10^{-11}.\frac{1}{3} = 1{,}66.10^{-12}m$$

Le résultat est vraisemblable car d'une part c'est plus petit que r(H), et d'autre part r(He)>r(Li)

5. L'énergie de l'électron d'un hydrogénoïde est donne par :

$$E_n = -\frac{Z^2me^4}{2\hbar^2n^2} = -13{,}6\ \frac{Z^2}{n^2}\ (eV)$$

Quelle est l'énergie fondamentale dans le cas de l'ion Hélium et de l'ion Lithium ? Les valeurs expérimentales sont respectivement -54.42 eV et -122.45 eV. Commenter la vraisemblance du résultat en comparant l'énergie d'ionisation de l'hydrogène, de l'ion hélion et de l'ion lithium. (1pt)

$$E_n\ \ He\ = -\frac{Z^2me^4}{2\hbar^2n^2} = -13{,}6\ \frac{2^2}{1^2} = 54{,}4\ (eV)$$
$$E_n\ \ Li\ = -\frac{Z^2me^4}{2\hbar^2n^2} = -13{,}6\ \frac{3^2}{1^2} = 122{,}4\ (eV)$$

On voit que l'énergie d'ionisation augmente : il est de plus en plus dur d'arracher l'électron car il est plus fortement lié. OU Cela est cohérent, le modèle de Bohr donne de bons résultats, même pour les hydrogénoïdes.

Exercice 3 : Boite quantique 1D et 2D (9pts)

I. Particule dans une boite 1D :

Document 1 : Niveaux d'énergie associés à l'atome d'hydrogène

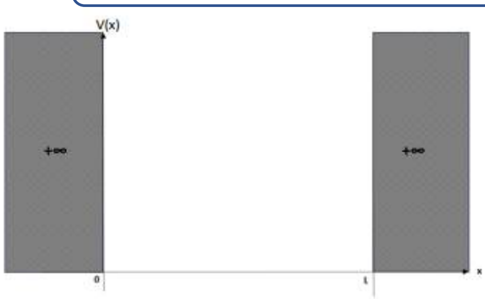

Fig. 1 : Puits de potentiel infini de largeur L

Dans cette première partie, on étudie une particule piégée dans une boîte à une dimension et de longueur L, modélisée de la manière suivante (voir schéma ci-contre).

Le potentiel V vaut :

- $+\infty$ en dehors de $[0; L]$
- 0 pour $x\ \in [0; L]$

1. Pour $x\ \in [0; L]$, donner l'équation de Schrödinger vérifiée par la fonction d'onde en fonction de la constante de Planck **h**, de la masse **m** et de l'énergie **E** de la particule. (1pt)

$$\mathrm{H}\psi = E\psi$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \mathrm{V}\psi = E\psi$$

Les solutions générales $\psi(x)$ de l'équation de Schrödinger pour $x \in [0; L]$ sont de la forme :

$\psi(x) = A.\sin(kx) + B.\cos(\mathrm{kx})$ Avec A et B des constantes à déterminer.

2. Quelles sont les conditions aux limites $\psi(0)$ et $\psi(L)$? (0,5pt)

$$\psi(0) = 0$$

$$\psi(L) = 0$$

3. Utiliser la condition concernant $\psi(0)$ pour déterminer une des constantes. (0,5pt)

$$\psi(0) = A.\sin(0) + B.\cos(0)$$

$$\psi(0) = B = 0$$

4. Utiliser la condition concernant $\psi(L)$ afin de montrer qu'il y a quantification. Déterminer la condition à vérifier par **k.** (1pt)

$$\psi(x) = A.\sin(kx)$$

$$\psi(L) = 0$$

$$\psi(L) = A.\sin(kL) = 0$$

$$\sin\ kL\ = 0$$

$$kL = n\pi$$

$$k = \frac{n\pi}{L}$$

On donne la relation suivante :

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

5. Montrer que l'énergie est elle aussi quantifiée. Déterminer l'expression des niveaux d'énergies en en fonction de $\hbar$, **n**, **L** et **m.** (1 pt)

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$$

$$E = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

Intéressons-nous maintenant à une particule piégée dans une boîte à deux dimensions. La modélisation est similaire, et les solutions obtenues sont du type :

$$\psi_{n_x,n_y}(x,y) = \sqrt{\frac{4}{a.b}}\sin\left(\frac{n_x\,.\pi.x}{a}\right)\sin\left(\frac{n_y\,.\pi.y}{b}\right) \qquad et \qquad E_{n_x,n_y} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m}\left(\frac{{n_x}^2}{a^2}+\frac{{n_y}^2}{b^2}\right)$$

6. A partir de maintenant, et pour toutes les questions suivantes, nous considèreront le cas où a=b=1, donner l'expression du plus petit niveau d'énergie, noté E_{min}. (1pt)

$$E_{min} = \frac{\hbar^2\pi^2}{m}$$

En quoi ce résultat est surprenant par rapport à la mécanique classique ? (1pt)

L'énergie minimale n'est pas nulle !

7. Que peut-on dire des niveaux d'énergies (2,1) et (1,2). Comment appelle-t-on cette situation ? (2pts)

Ils ont la même énergie. + calcul

On parle de dégénérescence.

8. Donner l'expression du sixième niveau d'énergie en fonction de E_{min}. Pour quelle couple (n_x,n_y) est-il atteint ? (1pts)

Pour le couple (4,1) ou (1,4) on obtient :

$$E_{4,1} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m}\left(4^2+1^2\right) = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m}.17$$