EPITA / S3

NOM : Corrigé + barème PRENOM : .... Décembre 2021 GROUPE : ....

Partiel de Physique

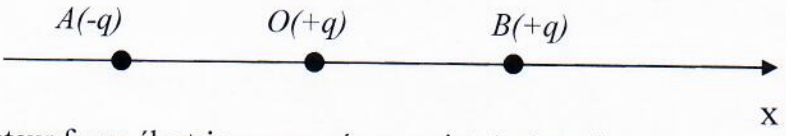
Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés.

QCM (4 points-pas de points négatifs).

Entourer la bonne réponse

(0,5 point) par question

1- Soit une distribution de charges ponctuelles représentée sur la figue ci-dessous : (AB = 2a et O est milieu de AB).



La norme du vecteur force électrique exercée au point A s'exprime par :

a) $F(A) = \frac{2k\,q^2}{a^2}$ b) $F(A) = \frac{5kq^2}{4a^2}$ c) $F(A) = \frac{5kq}{4a^2}$ d) $F(A) = 0$

2- On considère l'atome d'hydrogène formé d'un électron de charge (-e) qui gravite autour du noyau de charge (+e) à la distance r = OM, le point O est le centre de l'atome et M la position de l'électron. le potentiel créé au point M s'écrit :

a) $V(M) = \frac{ke}{r^2}$ b) $V(M) = -\frac{ke}{r}$ c) $V(M) = \frac{ke^2}{r}$ d) $V(M) = \frac{ke}{r}$

3- On considère l'atome d'hydrogène de la question 2, l'énergie potentielle électrique de l'électron au point M s'écrit

a) $E_p(M) = \frac{ke^2}{r^2}$ b) $E_p(M) = \frac{ke^2}{r}$ c) $E_p(M) = -\frac{ke^2}{r}$ d) $E_p(M) = -\frac{ke^2}{r^2}$

4- Soit un fil de longueur L, chargé avec une densité linéique λ. Le fil est placé sur l'axe (Oz). La charge élémentaire dQ d'un élément de longueur dl du fil s'exprime par :

a) $dQ = \lambda\, L$ b) $dQ = \lambda\, dz$ c) $dQ = \lambda\, dr.dz$

5- Le flux d'un champ électrique radial et ne dépendant que de r, à travers une surface de Gauss sphérique de rayon r est :

a) $\Phi(\vec{E}) = E(r)\,\pi r^2$ b) $\Phi(\vec{E}) = E(r)\frac{4}{3}\pi\, r^3$ c) $\Phi(\vec{E}) = E(r).4\pi r^2$

6- Que vaut le flux de $\vec{E}$ à travers un disque de rayon R ? On simplifiera en prenant un champ uniforme qui forme un angle α avec l'axe (Oz) du disque. On note E la norme du vecteur $\vec{E}$.

a) $\Phi(\vec{E}) = \pi R^2 E\cos(\alpha)$ b) $\Phi(\vec{E}) = 4\pi R^2 E\cos(\alpha)$ c) $\Phi(\vec{E}) = 2\pi R\, E\cos(\alpha)$

7- Si en un point M la distribution de charge présente un plan de symétrie $\mathcal{P}$, alors :

a) $\vec{E}(M) \perp \mathcal{P}$ b) $\vec{E}(M) \in \mathcal{P}$ c) $\vec{E}(M) \notin \mathcal{P}$ mais $\vec{E}(M) \parallel \mathcal{P}$

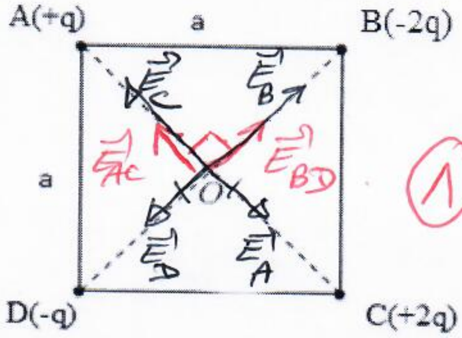
8- On considère un cylindre creux infini et de rayon *a*, chargé uniformément en surface. Le champ $\vec{E}(M)$ créé en un point M situé à l'intérieur du cylindre est

a) $\vec{E}(M) = \vec{0}$ b) non nul mais constant c) $\vec{E}(M) = k\sigma\frac{a}{r}\overrightarrow{u_r}$

A. Zellagui

Exercice 1 : ***Distribution discrète de charges électriques*** (5 points)

On considère quatre charges ponctuelles (**+q**), (**-2q**), (**+2q**) et (**-q**) situées respectivement aux sommets A, B, C et D d'un carré de côté a. On pose q > 0.



1

1- Représenter les vecteurs champs électriques $\overrightarrow{E_A}(O)$, $\overrightarrow{E_B}(O)$, $\overrightarrow{E_C}(O)$ et $\overrightarrow{E_D}(O)$ créés au centre O.

2- a) Exprimer les normes de chacun de ces vecteurs, en fonction de k, q et a.

b) En déduire la norme du champ résultant créé au point O, en fonction de k, q et a.

1) $\vec{E}_A$, $\vec{E}_C$ sortants (+q>0) , $\vec{E}_B$ et $\vec{E}_D$ entrant (-q<0).

2a) $E_A(0) = \dfrac{kq}{(OA)^2} = \dfrac{kq}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \dfrac{kq}{a^2 \cdot \frac{2}{4}} = \dfrac{2kq}{a^2} = E_D(0)$

1 $\vec{E}_B(0) = 2E_D = \dfrac{4kq}{a^2}$; $E_C(0) = 2E_A = \dfrac{4kq}{a^2}$

2b) $\vec{E}(0) = \vec{E}_A(0) + \vec{E}_B(0) + \vec{E}_C(0) + \vec{E}_D(0)$.

$\vec{E}(0) = \vec{E}_{AC} + \vec{E}_{BD}$

avec $E_{A,C} = E_C - E_A = 2E_A - E_A = E_A = \dfrac{2kq}{a^2}$.

1,5

$E_{B,D} = E_B - E_D = 2E_D - E_D = E_D = \dfrac{2kq}{a^2}$

$\vec{E}_{AC} \perp \vec{E}_{BC} \Rightarrow E(0) = \sqrt{(E_{AC})^2 + (E_{BC})^2}$; $E_{AC} = E_{BD}$

$E(0) = \sqrt{2(E_{AC})^2} = \sqrt{2}\, E_{AC} = \sqrt{2} \cdot \dfrac{2kq}{a^2}$

3- a) Exprimer le potentiel électrique au point A, en fonction de k, q et a.

b) En déduire l'énergie électrique de la charge placée au point A, en fonction de k, q et a.

3a) $V(A) = V_B(A) + V_C(A) + V_D(A)$.

$= -\frac{2kq}{a} + \frac{2kq}{a\sqrt{2}} - \frac{kq}{a}$.

$= -\frac{3kq}{a} + \frac{kq\sqrt{2}}{a}$.

1

b) $E_{Pe}(A) = q(A) \times V(A) = \frac{kq^2}{a}(\sqrt{2} - 3)$. 0,5

Exercice 2 *Théorème de Gauss* (6 points)

Une sphère de centre O, de rayon R est chargée en volume avec une densité variable $\rho(r) = \rho_0 \frac{r^2}{R^2}$.

ρ_0 et R sont des constantes positives.

1- Utiliser les symétries et les invariances pour trouver la direction du champ électrique $\vec{E}$ ainsi que les variables de dépendance de ce champ.

1) Symétrie : (sphère + charge de densité variable qu'en fonction de r, donnent une infinité de Psym. passant par M dont l'intersection donne (OM)) 0,5
$\vec{E}$ sera donc radial $\vec{E} = E.\vec{u}_r$.

Invariance
0,5 . sphère . $\rho = \rho(r)$ le système est donc invariant par rotation d'angles θ et φ $\Rightarrow$ E ne dépend que de r $\vec{E} = E(r)\vec{u}_r$

2- a) A l'aide du théorème de Gauss, exprimer le champ électrique $E(r)$, dans les régions r < R et r > R.

On donne : L'élément de surface sphérique : $dS = r^2 \sin(\theta)\, d\theta d\varphi$

L'élément de volume : $d\tau = r^2 \,\mathrm{dr} \sin(\theta)\, d\theta\, d\varphi$ avec $0 \leq \theta \leq \pi$; $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

$\Phi_{S_g}(\vec{E}) = \oiint_{S_g} \vec{E}(M).\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$.

S_g : sphère de rayon r passant par M.

$\Phi(\vec{E}) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} E(r) \underbrace{r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi}_{dS_G} = E(r) r^2 \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \underbrace{\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta}_{2}$

$$\Phi(\vec{E}) = E(r) \times 4\pi r^2 .$$

Qint

$r<R$ $\quad Q_{int} = \iiint_\tau \rho \, d\tau = \frac{\rho_0}{R^2} \cdot \int_0^r r^4 dr \underbrace{\int_0^\pi \sin\theta d\theta}_{2} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi}$

$$= \frac{\rho_0}{R^2} \cdot \frac{r^5}{5} \cdot 4\pi .$$

Th: $E(r) \cdot \cancel{4\pi} r^2 = \frac{\rho_0}{R^2} \cdot \frac{r^5}{5\varepsilon_0} \times \cancel{4\pi} \Rightarrow \boxed{E(r) = \frac{\rho_0 r^3}{5\varepsilon_0 R^2}}$ 1

$r>R$ $\quad Q_{int} = \frac{\rho_0}{R^2} \int_0^R r^4 dr \cdot \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi .$

$= \rho_0 \frac{R^5}{5\varepsilon_0 R^2} = \frac{\rho_0 R^3}{5\varepsilon_0}$; $\boxed{E(r) = \frac{\rho_0 R^3}{5\varepsilon_0 r^2}}$ 1

b) Montrer que le champ électrique est continu en r = R.

- $\lim_{r \overset{<}{\to} R} E(r) = \lim_{r \overset{<}{\to} R} \frac{\rho_0 r^3}{5\varepsilon_0 R^2} = \frac{\rho_0 R}{5\varepsilon_0}$

1

- $\lim_{r \overset{>}{\to} R} E(r) = \lim_{r \overset{>}{\to} R} \frac{\rho_0 R^3}{5\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho_0 R}{5\varepsilon_0}$; les limites sont égales, E(r) est continu en r = R

3- En déduire les expressions du potentiel électrique V(r) dans les régions (r < R et r > R).
(Ne pas calculer les constantes d'intégration).

On donne l'opérateur gradient en coordonnées sphériques : $\overrightarrow{grad} = \left(\frac{\partial}{\partial r}; \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}; \frac{1}{r\ sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)$.

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V) .$$

$$\left\{\begin{array}{l} E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \\ E_\theta = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \\ E_\varphi = -\frac{1}{r \sin(\theta)} \cdot \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0 \end{array}\right)$$ car $\vec{E}$ radial. $\Rightarrow$ V ne dépend ni de θ, ni de φ.

$$\Rightarrow V = V(r) \Rightarrow E_r = -\frac{dV}{dr}$$

$\underline{r \leq R}$: $V(r) = -\int \frac{\rho_0 r^3}{5\varepsilon_0 R^2}\, dr$

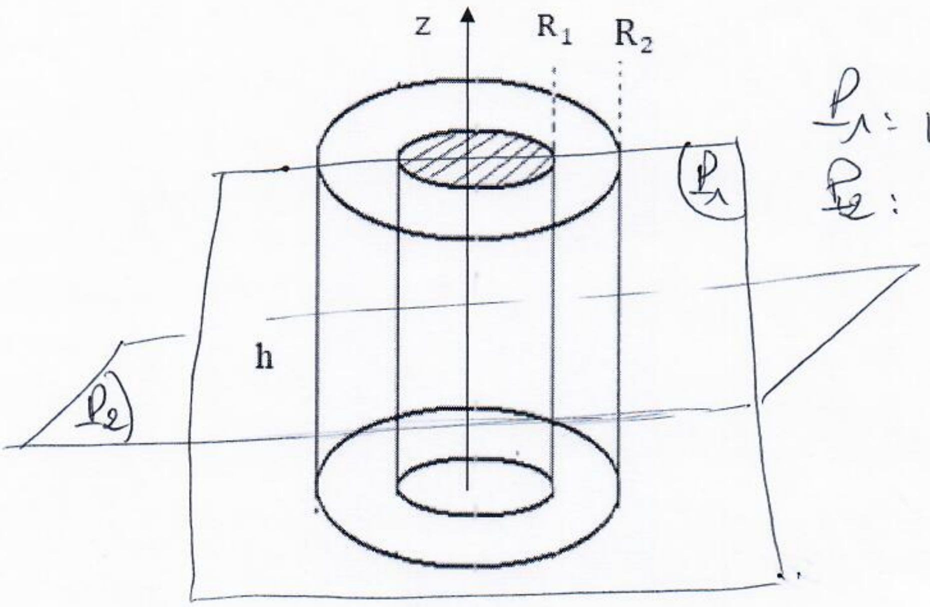
$$\boxed{V(r) = -\frac{\rho_0 r^4}{20\varepsilon_0 R^2} + C_1} \quad 1$$

$\underline{r \geq R}$:

$$V(r) = -\int \frac{\rho_0 R^3}{5\varepsilon_0 r^2}\, dr = \frac{\rho_0 R^3}{5\varepsilon_0 r} + C_2 \quad 1$$

Exercice 3 ***Théorème de Gauss*** (7 points)

On considère un système formé par deux cylindres de même axe (Oz), de rayons respectifs R_1 et R_2.
Le cylindre de rayon $\mathbf{R_1}$ est chargé en volume avec une densité constante et positive ρ_0.
Le cylindre de rayon $\mathbf{R_2}$ est creux et porte une charge positive +Q, répartie uniformément sur sa surface latérale. Les deux cylindres sont de même longueur h. Comme h ≫ r, on négligera les effets de bords et le champ peut être assimilé à celui d'une distribution infinie.



P_1 : plan $(\vec{u}_r, \vec{u}_z)$.
P_2 :

1- Utiliser les symétries et les invariances pour trouver la direction du champ électrique $\vec{E}$ ainsi que les variables de dépendance de ce champ.

hypot { • densité de charges constantes sur les 2 cyls.
• Longueur infinie ($h >> r$)

donnent 2 plans de sym : $P_1 = (\vec{u}_r, \vec{u}_z)$ et $P_2(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$

1 $\quad \vec{E} \in P_1 \cap P_2 \Rightarrow \vec{E}$ radial $\quad \vec{E} = E\,\vec{u}_r$.

Avec les m̂ hypots : on a une invariance par rotation d'angle θ et par translat sur $\vec{Oz}$.

Le champ ne dépend donc que de r.
et est radial.

$$\vec{E} = E(r)\,\vec{u_r}.$$

2- Utiliser le théorème de Gauss, pour exprimer le champ électrique $E(r)$ dans les régions :
$r < R_1$; $R_1 < r < R_2$ et $r > R_2$, en fonction de : ρ_0 , R, h, Q, ε_0 et r

On donne : L'élément de surface latérale : $dS = rd\theta dz$

L'élément de volume : $d\tau = rdrd\theta dz$

$$\Phi(\vec{E}) = \oiint_{S_g} \vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}.$$

Flux de $\vec{E}$

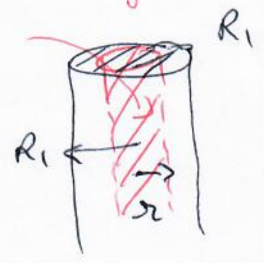
S_g = cylindre de rayon r et de m̂ hauteur h.

$$\Phi(\vec{E}) = \int_0^{2\pi}\int_0^{h} E(r)\, r\, d\theta\, dz = E(r).r \times 2\pi h.$$

Q_{int} :

charges Q_{int}.

$r < R_1$. $\quad Q_{int} = \int_0^{h}\int_0^{2\pi}\int_0^{r} \rho_0\, r dr d\theta dz$



$$Q_{int} = \rho_0 \frac{r^2}{2}\cdot 2\pi h = \rho_0 \pi r^2 h.$$

$R_1 < r < R_2$. $\quad Q_{int} = \rho_0 \int_0^{h} dz \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^{R_1} r\, dr$

$$Q_{int} = \rho_0 . h . 2\pi . \frac{R_1^2}{2} = \rho_0 \pi R_1^2 \times h.$$

$r > R_2$: $\quad Q_{int} = Q_{cyl(1)} + Q_{cyl(2)}$.

$$Q_{int} = \rho_0 \pi R_1^2 \times h + Q.$$

$\underline{E(r)}$? $\quad E(r) \times 4\pi r^2 = \dfrac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

$r < R_1$	$R_1 < r < R_2$	$r > R_2$
$E(r) = \dfrac{\rho_0 r^2 \pi h}{2\pi r h \varepsilon_0}$. 1 $E(r) = \rho_0 \dfrac{r}{2\varepsilon_0}$	$E(r) = \dfrac{\rho_0 \pi R_1^2 h}{\varepsilon_0 2\pi r h}$. $E(r) = \rho_0 \cdot \dfrac{R_1^2}{2\varepsilon_0 r}$ 1	$E(r) = \dfrac{\rho_0 \pi R_1^2 h + Q}{2\pi r h \varepsilon_0}$. 1 $E(r) = \dfrac{1}{2\varepsilon_0 r}\left(R_1^2 \rho_0 + \dfrac{Q}{\pi h}\right)$.

3- En déduire les expressions du potentiel $V(r)$ dans les régions : $r < R_1$; $R_1 < r < R_2$ et $r > R_2$.

(Ne pas calculer les constantes d'intégration). On donne les composantes de l'opérateur gradient en coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{grad}\left(\frac{\partial}{\partial r}; \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}; \frac{\partial}{\partial z}\right)$.

$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V)$; $\begin{cases} E_r = -\dfrac{\partial V}{\partial r} & (\vec{E} \text{ radial}) \\ E_\theta = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial V}{\partial \theta} = 0 \\ E_z = -\dfrac{\partial V}{\partial z} = 0 \end{cases}$

V ne dépend ni de θ, ni de z $\Rightarrow V = V(r)$

d'où : $E_r = -\dfrac{dV}{dr} \Rightarrow V(r) = -\int E(r)\,dr$.

$r < R_1$	$R_1 < r < R_2$.
$V(r) = -\dfrac{\rho_0}{2\varepsilon_0} r^2 + C_1$ 1	$V(r) = -\dfrac{\rho_0 R_1^2}{2\varepsilon_0} \ln(r) + C_2$ 1

$\underline{r > R_2}$

$V(r) = -\left(\dfrac{\rho_0 \pi R_1^2 h + Q}{2\pi h \varepsilon_0}\right)(\ln(r)) + C_3$ 1