NOM : .... PRENOM :.. GROUPE :........

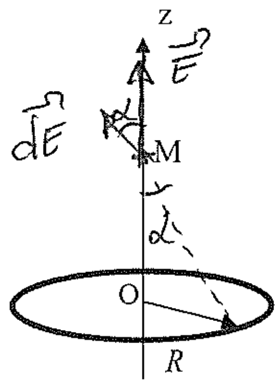
Partiel 1 de Physique (Durée:1h30)

Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés.

Exercice 1 (7 points)

Un anneau de rayon R, d'axe Oz est chargé avec une densité linéaire λ constante et **positive.**

1- Utiliser les règles de symétrie pour trouver la direction du champ électrique créé par l'anneau, en un point M quelconque de l'axe Oz. Représenter $\vec{E}(M)$.



$\vec{E}$ appartient à l'intersection d'une infinité de plans de sym verticaux passant par M, $\vec{E}$ sera donc sur $O\vec{z}$.

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z = E \end{pmatrix}$$

2- Exprimer le champ élémentaire dE(M) créé au point M de l'axe (Oz), par une charge dQ d'un élément de longueur ($d\ell$=R.dθ) de l'anneau, en déduire la composante dE_z en fonction de R, k, λ, z, θ.

$$dE = \frac{k\,dQ}{(PM)^2} = \frac{k\lambda R\,d\theta}{z^2+R^2}$$

$$dE_z = dE\cos(\alpha) = dE \cdot \frac{z}{PM}$$

$$= \frac{k\lambda R\,d\theta}{(z^2+R^2)\sqrt{z^2+R^2}}$$

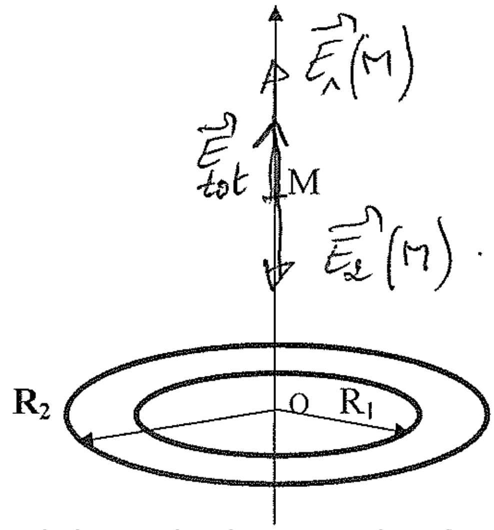
3- Montrer que le champ total au point M est d'expression : $E(z) = 2\pi.k\lambda R.\dfrac{z}{(z^2+R^2)^{3/2}}$.

on intègre dE_z de 0 à 2π car la seule variable est θ

$$E = E_z = \int_0^{2\pi} \frac{k\lambda R\, d\theta . z}{(z^2+R^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{k\lambda R z}{(z^2+R^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{(2\pi k\lambda R) z}{(z^2+R^2)^{3/2}}$$

4- On considère maintenant deux anneaux de même centre O, de même axe (Oz) et de rayons respectifs R_1 et R_2. L'anneau de rayon R_1 est chargé avec une densité λ constante et positive, l'anneau de rayon R_2 est chargé avec une densité $-\lambda$, constante et négative.



a) Utiliser la relation de la question 3 pour exprimer **les normes** des champs électriques créés par les 2 anneaux au point M,
b) Représenter ces vecteurs sur le schéma ci-dessus.

normes :

$$E_1(M) = \frac{2\pi k\lambda z}{(z^2+R_1^2)^{3/2}}$$ divergent de M vers l'ext.

$$E_2(M) = \frac{2\pi k\lambda z}{(z^2+R_2^2)^{3/2}}$$ convergent de M vers le centre O.

c) En déduire la norme du champ électrique total au point M

les 2 vecteurs étant colinéaires et de sens opposés, le vecteur total aura comme norme

$$E(M) = E_1 - E_2.$$

$$= 2\pi k \lambda z \left(\frac{1}{(z^2+R_1^2)^{3/2}} - \frac{1}{(z^2+R_2^2)^{3/2}} \right).$$

Exercice 2 : ***Théorème de Gauss*** (7 points)

Une sphère **creuse** de centre O, de rayon R est chargée en surface avec une densité σ, constante et positive.

1- Utiliser les symétries et les invariances pour trouver la direction du champ électrique $\vec{E}$ ainsi que les variables de dépendance.

symétrie : sphère chargée avec une densité σ cste
il existe donc une infinité de Plans de symétrie passant par M et le centre O, l'intersection donne la droite (OM), $\vec{E}$ sera donc radial.
• il y a une invariance par rotation d'angle θ et une invariance par rotation d'angle φ, on en déduit $\vec{E} = E(r)\vec{u_r}$

2- a) A l'aide du théorème de Gauss, exprimer le champ électrique, dans les régions r < R et r > R.

$$\oiint \vec{E}.\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

S_{gauss} = sphère de rayon r passant par M.

$\Phi(\vec{E}) = E \times S_g$ car E est radial et ne dépend que de r

$= E \times 4\pi r^2$

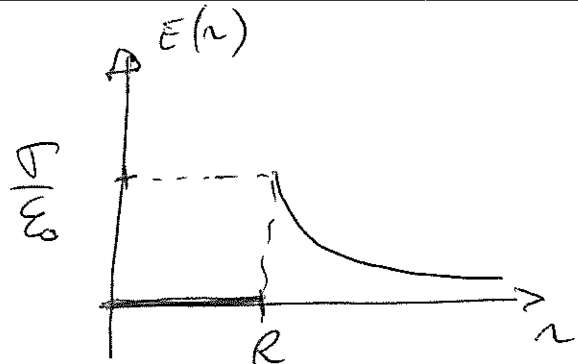
$\underline{r<R}$ $Q_{int} = 0$ (sphère creuse)

$\Rightarrow \boxed{E = 0}$. $(r<R)$.

$\underline{r>R}$ $E \times 4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{Q_{sph}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma \times 4\pi R^2}{\varepsilon_0}$.

$$\boxed{E(r) = \frac{\sigma . R^2}{\varepsilon_0 r^2}}$$

b) Donner l'allure de la courbe E(r) en fonction de r. Commenter cette courbe au niveau de r = R.



$\lim_{r \to R^-} E(r) = 0$ et $\lim_{r \to R^+} E(r) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$ E n'est donc pas continu.

3- En déduire le potentiel V(r) pour (r < R et r > R). (Ne pas calculer les constantes d'intégration).

$$\vec{grad}_{Sph} = \left(\frac{\partial}{\partial r}; \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}; \frac{1}{r.\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)$$

$\vec{E} = -\vec{grad}(V)$.

$\vec{E}$ est radial et ne dépendant que de r

alors $E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{dV}{dr}$

$dV = -E\,dr \Rightarrow V(r) = -\int E\,dr$.

$\underline{r<R}$; $r \geq R$.

$V = cste = C_1$ $V(r) = -\frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0}\int \frac{1}{r^2}\,dr$.

$V(r) = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r} + C_2$

4- On considère maintenant une sphère de rayon R, chargée en **volume** avec une densité constante ρ_0.

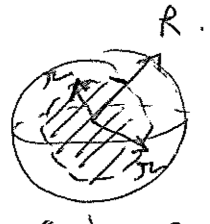
a) Retrouver à l'aide du théorème de Gauss, les expressions du champ électrique dans les régions r < R et r > R. Le champ étant radial et dépendant de la variable r.

$\vec{E}$ est encore radial et dépendant de r.
le flux aura donc la même expression.

$\Phi(\vec{E}) = E \times S_g = E \times 4\pi r^2$.

<u>r<R</u>.

$E \times 4\pi r^2 = \dfrac{\rho \times \frac{4}{3}\pi r^3}{\varepsilon_0}$.



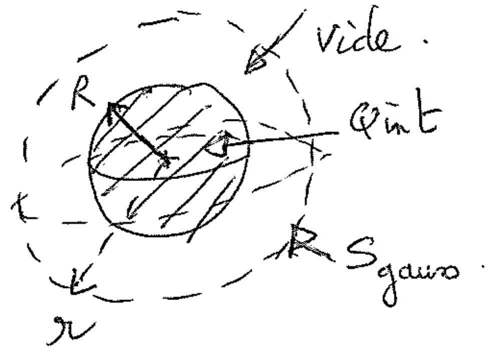
$Q_{int} = \rho \times Vol$.
$= \rho \times \frac{4}{3}\pi r^3$.

$E(r) = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0} r$

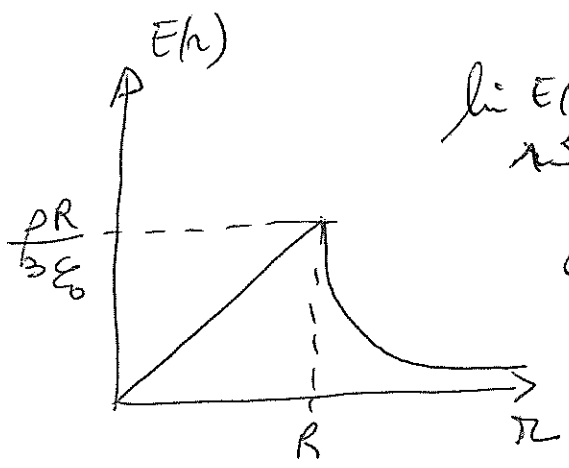
<u>r>R</u>

$E.4\pi r^2 = \rho \dfrac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\varepsilon_0}$.

$E = \dfrac{\rho . R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$.



b) Donner l'allure de la courbe E(r) en fonction de r, commenter cette courbe au niveau de r = R.



$\lim_{r \to R^-} E(r) = \lim_{r \to R^+} E(r) = \dfrac{\rho R}{3\varepsilon_0}$.

E(r) est donc continu en r = R.

c) En déduire les expressions du potentiel électrique V(r) dans les régions $r < R$ et $r > R$.

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}(V).$$

$$\vec{E} = E(r)\,\vec{u}_r \Rightarrow E = -\frac{dV}{dr}.$$

$$V(r) = -\int E(r)\,dr.$$

$r \leq R$; $r \geq R$.

$$V(r) = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\int r\,dr. \qquad V(r) = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}R^3 \int \frac{1}{r^2}\,dr.$$

$$V(r) = -\frac{\rho}{6\varepsilon_0}r^2 + C_1 \qquad V(r) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r} + C_2$$

Exercice 3 Les questions I et II sont indépendantes (6 points)

I- On considère un conducteur cylindrique d'axe Oz et de rayon R, traversé par un courant I de densité variable $J(r) = J_0 \dfrac{r}{R}$, où J_0 et R sont des constantes.

1- Exprimer le courant total I traversant le conducteur en fonction de R et J_0. ($dS = r.dr.d\theta$)

$$I = \iint_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^R J_0 \frac{r}{R}\cdot r\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{J_0}{R}\cdot\int_0^R r^2\,dr \times \int_0^{2\pi} d\theta.$$

$$= \frac{J_0}{R} \times \frac{R^3}{3} \times 2\pi. = \frac{2\pi}{3}J_0 . R^2$$

2- Faire le calcul pour $J_0 = 2.10^5\ A.m^{-2}$ et $R = 2mm$.

$$I = 2.10^5 . \frac{2\cancel{\pi}}{\cancel{3}} . 4.10^{-6} \qquad (\pi \simeq 3).$$

$$I = 16.10^{-1} = 1{,}6A$$

II- Un fil conducteur de longueur L = 1m et de section S = 3.10^{-6} m^2 est placé dans un champ électrique uniforme E = 0,5 $V.m^{-1}$

Calculer

1) La tension aux bornes du conducteur.
2) La résistance R du fil, sachant que le courant qui le traverse est : I = 5 A.
3) La résistivité ρ, ainsi que la conductivité γ de ce conducteur.
4) La densité de courant J.
5) La vitesse moyenne des électrons. On donne : $n_e = 10^{24} m^{-3}$ et $|q_{e^-}| = 1{,}6.10^{-19} c$

1) $U = E \times L = 0{,}5\,V$.

2) $U = RI \Rightarrow R = \frac{U}{I} = \frac{0{,}5}{5} = 0{,}1\,\Omega$

3) $R = \rho \cdot \frac{L}{S} \Rightarrow \rho = \frac{R.S}{L}$

$\rho = \frac{0{,}1 \times 3\,10^{-6}}{1} = 3.10^{-7}\,\Omega m$.

$\gamma = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{3}\,10^{+7} = 0{,}33.10^{7}\,\Omega^{-1}m^{-1}$

$\gamma = 3{,}33.10^{6}\,\Omega^{-1}m^{-1}$

4) $J = \frac{I}{S} = \frac{5}{3\,10^{-6}} = 1{,}67.10^{6}\,Am^{-2}$.

5) $J = n_e|q_e|\langle v \rangle$

$\Rightarrow \langle v \rangle = \frac{J}{n_e|q_e|} = \frac{1{,}67.10^{6}}{10^{24}.1{,}6.10^{-19}}$.

$\langle v \rangle \simeq 10\,ms^{-1}$.