EPITA / S_3 Décembre 2016

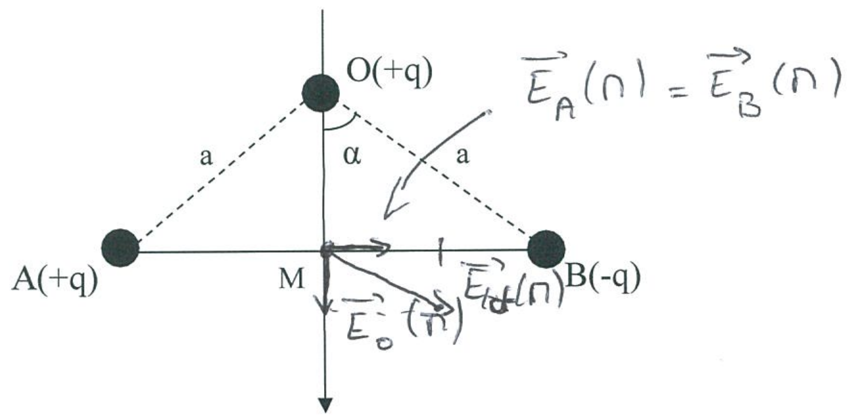
NOM : .... PRENOM :... GROUPE :........

Partiel 1 de Physique (Durée:1h30)

Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés. CORRIGÉ

Exercice 1 **Distribution discrète** (5 points)

On considère trois charges ponctuelles +q, +q et –q, placées respectivement aux points O, A et B. Le point M appartient à la médiatrice du segment AB. On donne OA = OB = a.



1-a) Représenter sur le schéma ci-dessus les vecteurs champs électrostatiques créés par les trois charges au point M, ainsi que le champ total $\vec{E}(M)$.

b) Exprimer les normes $E_O(M)$, $E_A(M)$ et $E_B(M)$, en fonction de k, q, a et α, ainsi que celle du vecteur champ total : $E(M)$.

b) On peut écrire directement que $E_A(M) = E_B(M)$

et $E_A(M) = k\dfrac{q}{AM^2} = \boxed{k\dfrac{q}{a^2\sin^2\alpha}} = E_B(M)$

. Par ailleurs, $E_O(M) = k\dfrac{q}{OM^2} = \boxed{k\dfrac{q}{a^2\cos^2\alpha}}$

. Dès lors, comme $\vec{E}_A + \vec{E}_B$ et $\vec{E}_O$ sont orthogonaux, on trouve directement

$$E(M) = \left((2E_A)^2 + E_O^2\right)^{1/2} = \boxed{\left(\frac{kq}{a}\right)\left(\frac{4}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\alpha}\right)^{1/2}}$$

2- Exprimer le potentiel électrique V(M) créé au point M, en fonction de k, q, a et α.

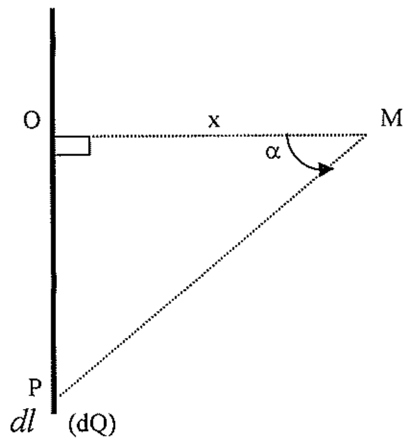
Comme $V(M) = V_0(M) + V_A(M) + V_B(M)$ et $q_A = -q_B$

on a $V(M) = V_0(M)$

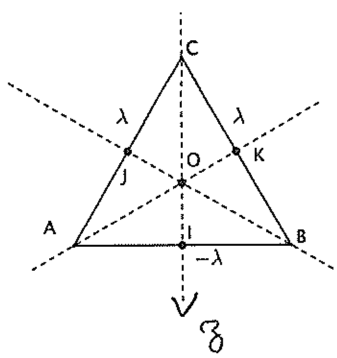
$= \boxed{k \dfrac{q}{a \cos \alpha}}$

Exercice 2 **Distribution continue** (3 points)

On rappelle ici qu'un élément de longueur de charge dQ situé au point P d'un fil de charge linéique λ constante, crée un champ électrique élémentaire $dE_x(M) = \dfrac{k.\lambda}{x}\cos(\alpha)d\alpha$ où α est tel qu'indiqué ci-dessous.



1-En utilisant ce résultat calculer les normes des vecteurs $\overrightarrow{E_{AC}}(O)$, $\overrightarrow{E_{CB}}(O)$ et $\overrightarrow{E_{BA}}(O)$ créés respectivement par la distribution continue de charges suivantes au centre O. Représenter ces vecteurs.



où ABC est un triangle équilatéral de côté 2a. Les segments [AC] et [BC] portent une densité linéique de charges λ et [AB] une densité négative $-\lambda$.

On se focalise sur le calcul sur les normes :

$dE_{AC}(O) = \frac{k\lambda}{JO} \cos\alpha \, d\alpha$ et $JO = AJ . \tan\frac{\pi}{6}$

$= a/\sqrt{3}$

$\Rightarrow E_{AC}(O) = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{k\lambda\sqrt{3}}{a} \cos\alpha \, d\alpha$

$= k\lambda \frac{\sqrt{3}}{a} . 2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \boxed{\frac{k\lambda}{a} . 3}$

$= E_{CB}(O) = E_{BA}(O)$ (calcul des normes).

2) En déduire l'expression du champ total créé au point O en fonction de k, λ et a

. Plusieurs méthodes. J'en présente une avec les projetés.

$\vec{E}_{AC}(O) + \vec{E}_{CB}(O) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) . E_{AC}\vec{u_z}$

$= E_{AC}\vec{u_z}$

. Parallèlement, $\vec{E}_{AB}(O) = + \underbrace{E_{AB}(O)}_{\text{norme} \geq 0}\vec{u_z}$

. Donc le champ total $\vec{E}(O)$ s'écrit $\boxed{\vec{E}(O) = 6\frac{k\lambda}{a}\vec{u_z}}$

Exercice 3 ***Théorème de Gauss*** (6 points)

Un fil de longueur **infiniment grande h**, porte une charge Q positive répartie avec une densité constante.

1- Utiliser les symétries et invariances pour donner la direction du vecteur champ électrique créé par le fil en un point M extérieur au fil. On place le fil sur un axe (Oz).

Symétries : prenons M qcq. Les plans définis par $(M, \vec{u_r}, \vec{u_\theta})$ et $(M, \vec{u_r}, \vec{u_z})$ sont des plans de symétrie, donc contiennent $\vec{E}(M) \Rightarrow \vec{E}(M) = E_r(M)\vec{u_r}$

Invariances : la distribution de charges est invariante par rotation autour de (Oz) et translation selon (Oz) $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{E}(M) = E_r(r)\vec{u_r}}$

2- A l'aide du théorème de Gauss, exprimer le champ électrique E(r) créé au point M extérieur au fil.

. Pour M de rayon r, prenons la surface de Gauss suivante (S_g) : le cylindre de hauteur ℓ, de rayon r, d'axe (Oz) et centré en M.

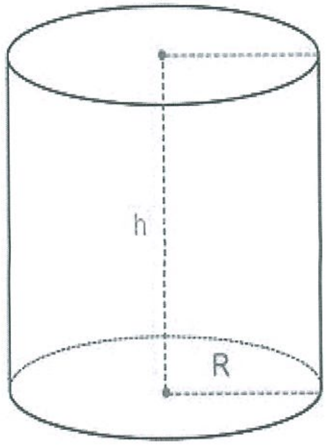
. Le théorème de Gauss s'écrit : $\oint\!\!\oint_{(S_g)} \vec{E}\cdot\vec{dS} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$

ce qui équivaut à dire $E(r)\cdot 2\pi r\ell = \frac{\lambda\cdot\ell}{\varepsilon_0}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(M) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{u_r}} \quad \text{où } \lambda = \frac{Q}{h}.$$

3- On couvre le fil de charge Q par **un cylindre creux** de même axe (Oz), de même hauteur h, de rayon R, chargé en surface latérale avec une densité σ constante et positive.

a) Donner les expressions du champ électrique E(r) dans les régions r < R et r > R.



Pour $r < R$, seule la charge du fil importe.
D'après la question 2), $\vec{E}(r<R) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{u_r}$.

Pour $r > R$, on prend en compte en plus la charge portée par le cylindre. On peut alors écrire en utilisant le théorème de Gauss : $\vec{E}(r) = \frac{1}{2\pi r.\ell}\left(\frac{\lambda.\ell}{\varepsilon_0} + \frac{\ell\sigma.2\pi R}{\varepsilon_0}\right)\vec{u_r}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(r) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\lambda}{r} + \frac{2\pi R\sigma}{r}\right)\vec{u_r}}$$

b) En déduire les expressions du potentiel électrique V(r) dans les régions r < R et r > R.

- Pour $r<R$, $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}\, V \Rightarrow \boxed{V(r) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r + V_0}$
- Pour $r>R$, $\boxed{V(r) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}(\lambda + 2\pi R\sigma)\ln r + V_1}$

Remarque : on peut fixer V_0 et V_1 en utilisant la continuité du potentiel $V(r)$.

Exercice 4 ***Electrocinétique*** ***Partie A*** (3 points)

On considère un conducteur cylindrique d'axe Oz et de rayon R, traversé par un courant I de densité variable $J(r) = J_0\frac{r^2}{R^2}$, où J_0 et R sont des constantes.

1- Exprimer le courant total I traversant le conducteur en fonction de R et J_0. Faire le calcul pour $J_0 = 10^6$ A/m² et R = 3mm.

- On a $I = \iint_{section} J(r).dS = \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_0^R r.J_0\frac{r^2}{R^2}dr$

$$= \frac{2\pi J_0}{R^2}\frac{R^4}{4} = \boxed{\frac{\pi R^2}{2}J_0}.$$

AN : $I = \frac{3^3.10^{-6}}{2}.10^6 = \boxed{13,5\ A}$

2- Exprimer en fonction de r le courant I' qui traverse une section de rayon r < R.

Solu : $I' = 2\pi J_0 \int_0^r r^3/R^2 \, dr$

$$= 2\pi J_0 \frac{r^4}{4R^2} = \boxed{\frac{\pi J_0}{2} \frac{r^4}{R^2}}$$

Partie B (3 points)

Un fil conducteur en cuivre, de conductivité $\gamma = 10^8\ \Omega^{-1}.m^{-1}$, de longueur L = 1m et de rayon R=1 mm est traversé par un courant I de densité $\vec{J}$ uniforme de valeur $J = 2.10^7$ A/m²

Calculer :

1- La valeur du courant I traversant le conducteur.

2- Le champ électrique à l'intérieur du conducteur. Représenter les grandeurs I, $\vec{J}$ et $\vec{E}$.

3- La différence de potentiel U entre les bornes du conducteur.

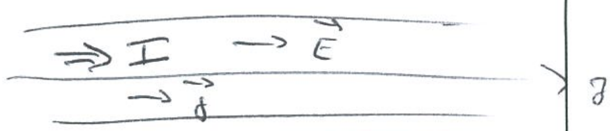
4- La résistance R du conducteur.

5- La densité électronique n_{e-}, sachant que la vitesse moyenne des charges est : $V_{moy} = 0,2ms^{-1}$.

On donne : $q_{e-} = -1.6.10^{-19}C$.

1. $I = J.S = J.\pi R^2 = 2.10^7 . 3 . 10^{-6}$ $= \boxed{60\ A}$

2. $\|\vec{E}\| = \frac{\|\vec{J}\|}{\gamma} = \frac{2.10^7}{10^8} = \boxed{2.10^{-1}\ V.m^{-1}}$



3. $U = \|\vec{E}\|.L = 0,2\ V$

4. $R = \frac{U}{I} = \frac{0,2}{60} = 0,33.10^{-2} = \boxed{3,3.10^{-3}\ \Omega}$

Rem : $R = \frac{L}{S}.\rho = \frac{L}{S}\frac{1}{\gamma}$.

5. $J = n_{e-}.|q_{e-}|.V_{moy} \Rightarrow n_{e-} = \frac{J}{|q_{e-}|.V_{moy}} = \frac{2.10^7}{1.6.10^{-19}.2.10^{-1}}$

$= 0,66.10^{27}\ m^{-3}$

$\approx \boxed{6,6.10^{26}\ m^{-3}}$

Formulaire

1- Théorème de Gauss : $\Phi(\vec{E}) = \oiint_{Sg} \vec{E}.d\vec{S} = \dfrac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$

2- Elément de surface latérale d'un cylindre de rayon r et de hauteur h : $dS_{lat} = r d\theta . dz$

3- Composantes du gradient en coordonnées cylindriques

$$\vec{grad} = \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}.\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$