Exercice 1

1. À l'aide du critère de d'Alembert, déterminer la nature de la série $\sum \frac{n!}{n^n}$.
2. À l'aide du critère de Cauchy, déterminer la nature de la série $\sum \left(\frac{(n+1)^2}{(an)^2+1}\right)^n$ en fonction de $a \in \mathbb{R}$.
3. À l'aide du critère de Leibniz pour les séries alternées, déterminer la nature de la série $\sum (-1)^n \frac{n+1}{n\ln(n)}$.

Exercice 2

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & -4 \\ 2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$.

A et B sont-elles diagonalisables dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$? Si oui, exhiber une matrice de passage et la matrice diagonale associée, en déterminant une base de chaque espace propre de manière méthodique.

Exercice 3

Étudier, selon les valeurs du paramètre $a \in \mathbb{R}$, la diagonalisabilité de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2-2a & 1-a \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 2a-2 & a \end{pmatrix}$$

(La diagonalisation dans les cas favorables n'est pas demandée).

Exercice 4

Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A $\big($c'est-à-dire, si l'on note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ alors $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\big)$.
Soit $\mathscr{E}$ la famille $\big((1,0,1),(2,2,2),(3,3,1)\big)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.
2. A est-elle inversible ? Justifier sans calcul.
3. Montrer que $\mathscr{E}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f)$

Exercice 5

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4 et soit $\mathscr{E} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ une base de E.
Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ tel que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

1. Montrer que p est un projecteur (i.e. $p \circ p = p$).
2. En regardant les images des vecteurs de $\mathscr{E}$, trouver une base de $\mathrm{Im}(p)$.
3. Appliquer le théorème du rang à p pour trouver la dimension de $\mathrm{Ker}(p)$.
4. En déduire une base de $\mathrm{Ker}(p)$ à l'aide des vecteurs e_i.

Exercice 6

Le but de cet exercice est de déterminer une formule directe pour calculer les termes de la suite définie par la relation de récurrence

$$u_{n+3} = -u_{n+2} + 4u_{n+1} + 4u_n$$

et dont les premiers termes sont $u_0 = 0, u_1 = 1, u_2 = 1$.

1. En notant $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$, déterminer une matrice M telle que $X_{n+1} = MX_n$. Déduire une expression de X_n en fonction de M, n et X_0.
2. Calculer (sous forme développée) le polynôme caractéristique de M ; en remarquant qu'il est divisible par $(X + 1)$, le factoriser. Montrer que M est diagonalisable, et trouver une matrice D diagonale et une matrice P inversible telles que $M = PDP^{-1}$.
3. En déduire M^n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.

   Remarque : pensez à vérifier la compatibilité de votre résultat avec les données de l'énoncé en comparant les premières valeurs de u_n calculées selon la formule de récurrence et la formule directe obtenue.