Exercice 1

1. Notons $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{(n+1)n^n}{(n+1)(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$$
$$= \mathrm{e}^{-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \mathrm{e}^{-n\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)} = \mathrm{e}^{-1+o(1)} \longrightarrow \frac{1}{\mathrm{e}}$$

$\dfrac{1}{\mathrm{e}} < 1$ donc d'après le critère de d'Alembert, $\sum u_n$ converge.

2. Notons $v_n = \left(\dfrac{(n+1)^2}{(an)^2+1}\right)^n$.

$$\sqrt[n]{v_n} = \frac{(n+1)^2}{(an)^2+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^2}{(an)^2} = \frac{1}{a^2}$$

Donc d'après le critère de Cauchy :
— si $a^2 < 1$ i.e. $a \in]-1;1[$ alors $\sum v_n$ converge ;
— si $a^2 > 1$ i.e. $a \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ alors $\sum v_n$ diverge.
Si $a \in \{-1;1\}$ le critère de Cauchy est impuissant. Cependant, dans ce cas-là :

$$v_n = \frac{n^2+2n+1}{n^2+1} > 1 \text{ donc } v_n \nrightarrow 0$$

La condition nécessaire de convergence implique alors que $\sum v_n$ diverge.

3. Notons $w_n = \dfrac{n+1}{n\ln(n)}$.

$(w_n)_{n\geqslant 2}$ est une suite à termes strictement positifs, et $w_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\ln(n)} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Montrons que (w_n) est décroissante, en s'intéressant par exemple aux variations de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x+1}{x\ln(x)}$.
Sur $[2,+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{x\ln(x) - (x+1)\big(\ln(x)+1\big)}{x^2\ln^2(x)} = \frac{-x-1-\ln(x)}{x^2\ln^2(x)} < 0.$$

f est donc strictement décroissante sur $[2,+\infty[$ donc $(w_n) = \big(f(n)\big)$ est elle aussi strictement décroissante.
Donc, par le critère de Leibniz pour les séries alternées :
w_n est décroissante et tend vers 0, donc $\sum(-1)^n w_n$ converge.

Exercice 2

$$\begin{aligned}
P_A(X) &= \begin{vmatrix} 1-X & -4 & -2 \\ -1 & 1-X & -1 \\ 2 & 4 & 5-X \end{vmatrix} \\
&\underset{L_1 \leftarrow L_1+L_3}{=} \begin{vmatrix} 3-X & 0 & 3-X \\ -1 & 1-X & -1 \\ 2 & 4 & 5-X \end{vmatrix} \\
&\underset{C_3 \leftarrow C_3-C_1}{=} \begin{vmatrix} 3-X & 0 & 0 \\ -1 & 1-X & 0 \\ 2 & 4 & 3-X \end{vmatrix} \\
&= (1-X)(3-X)^2
\end{aligned}$$

Ainsi, P_A est scindé, et les valeurs propres de A sont 1 (de multiplicité 1) et 3 (de multiplicité 2). Ayant nécessairement $\dim(E_1) = 1$, A sera diagonalisable si et seulement si on a de plus $\dim(E_3) = 2$.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_3 \Longleftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad &\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrcl} x & -4y & -2z & = & 3x \\ -x & +y & -z & = & 3y \\ 2x & +4y & +5z & = & 3z \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrcl} -2x & -4y & -2z & = & 0 \\ -x & -2y & -z & = & 0 \\ 2x & +4y & +2z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow x + 2y + z = 0
\end{aligned}$$

D'où on déduit que $E_3 = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$; et comme $\dim(E_3) = 2 = m(3)$ la matrice A est diagonalisable.

Cherchons un vecteur propre associé à la valeur propre 1 pour établir une matrice de passage :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \Longleftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad &\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrcl} x & -4y & -2z & = & x \\ -x & +y & -z & = & y \\ 2x & +4y & +5z & = & z \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrcl} & -4y & -2z & = & 0 \\ -x & & -z & = & 0 \\ 2x & +4y & +4z & = & 0 \end{array} \right. \\
&\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -z \\ z & = & -2y \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Ainsi, $E_1 = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$.

On en déduit :

$A = PDP^{-1}$ avec par exemple $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
P_B(X) &= \begin{vmatrix} 1-X & -2 & -2 \\ -2 & -1-X & -4 \\ 2 & 4 & 7-X \end{vmatrix} \\
&\underset{L_2 \leftarrow L_2+L_3}{=} \begin{vmatrix} 1-X & -2 & -2 \\ 0 & 3-X & 3-X \\ 2 & 4 & 7-X \end{vmatrix} \\
&\underset{C_3 \leftarrow C_3-C_2}{=} \begin{vmatrix} 1-X & -2 & 0 \\ 0 & 3-X & 0 \\ 2 & 4 & 3-X \end{vmatrix} \\
&= (3-X)\begin{vmatrix} 1-X & -2 \\ 0 & 3-X \end{vmatrix} \\
&= (1-X)(3-X)^2
\end{aligned}$$

P_B est scindé, et les valeurs propres de B sont donc également 1 (de multiplicité 1) et 3 (de multiplicité 2). De même que pour A, étant donné que $\dim(E_1) = 1$, B sera diagonalisable si et seulement si $\dim(E_3) = 2$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_3 \Longleftrightarrow B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rrrcl} x & -2y & -2z & = & 3x \\ -2x & -y & -4z & = & 3y \\ 2x & +4y & +7z & = & 3z \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rrrcl} -2x & -2y & -2z & = & 0 \\ -2x & -4y & -4z & = & 0 \\ 2x & +4y & +4z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} y & = & -z \\ x & = & 0 \end{array}\right.$$

Donc $E_3 = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; comme $\dim(E_3) = 1 \neq m(3) = 2$ la matrice B n'est pas diagonalisable.

Exercice 3

$$
\begin{aligned}
P_A(X) &= \begin{vmatrix} 1-X & 2-2a & 1-a \\ 1 & 4-X & 1 \\ 0 & 2a-2 & a-X \end{vmatrix} \\
&\underset{L_1 \leftarrow L_1+L_3}{=} \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 1-X \\ 1 & 4-X & 1 \\ 0 & 2a-2 & a-X \end{vmatrix} \\
&\underset{C_3 \leftarrow C_3-C_1}{=} \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ 1 & 4-X & 0 \\ 0 & 2a-2 & a-X \end{vmatrix} \\
&= (1-X)(4-X)(a-X)
\end{aligned}
$$

Donc P_A est toujours scindé, et ses racines sont $1, 4$ et a.
Si $a \notin \{1, 4\}$ alors P_A est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable.
Si $a \in \{1, 4\}$ alors a est racine double, et A sera diagonalisable si et seulement si $\dim(E_a) = 2$.

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_a \iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & +(2-2a)y & +(1-a)z & = & ax \\ x & +4y & +z & = & ay \\ & (2a-2)y & +az & = & az \end{array} \right.
$$

$$
\iff \left\{ \begin{array}{cccccc} (1-a)x & +(2-2a)y & +(1-a)z & = & 0 \\ x & +(4-a)y & +z & = & 0 \\ & (2a-2)y & & = & 0 \end{array} \right.
$$

Si $a = 1$ on obtient pour seule équation $x + 3y + z = 0$, donc $E_a = E_1 = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$; comme cet espace est de dimension 2, A est diagonalisable.
Si $a = 4$ on obtient $\left\{ \begin{array}{ccc} y & = & 0 \\ x & = & -z \end{array} \right.$ donc $E_a = E_4 = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$, d'où $\dim(E_a) = 1 \neq m(a) = 2$, et A n'est pas diagonalisable.
Conclusion : A est diagonalisable si et seulement si $a \neq 4$.

Exercice 4

1.

$$
\begin{aligned}
(x,y,z)\in \operatorname{Ker}(f) &\iff A\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\\
&\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} 4x & + & 4y & + & 2z & = & 0\\ 4x & + & 3y & + & 3z & = & 0\\ 4x & + & 5y & + & z & = & 0\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} 4x & + & 4y & + & 2z & = & 0\\ & - & y & + & z & = & 0\\ & & y & - & z & = & 0\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{l} y=z\\ 4x+6y=0\end{array}\right.\\
&\iff \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}y\\ y\\ y\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

D'où $\operatorname{Ker}(f)=\operatorname{Vect}\big(\{(-3,2,2)\}\big)$.

D'après le théorème du rang, on en déduit que l'image de f est de dimension 2 ; les deux premiers vecteurs colonnes de A donnent une famille libre de deux éléments de $\operatorname{Im}(f)$ donc c'en est une base : $\operatorname{Im}(f)=\operatorname{Vect}\big(\{(4,4,4),(4,3,5)\}\big)$, que l'on peut aussi écrire $\operatorname{Vect}\big(\{(1,1,1),(0,-1,1)\}\big)$ par exemple.

2. $\operatorname{Ker}(f)\neq\{0\}$ donc f n'est pas injective, donc pas bijective ; ainsi, A n'est pas inversible.

3. $\mathscr{E}$ est une famille de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3, donc c'est une base si et seulement si c'est une famille libre.

$$
\begin{aligned}
\lambda(1,0,1)+\mu(2,2,2)+\nu(3,3,1)=(0,0,0) &\iff \left\{\begin{array}{ccccccc} \lambda & + & 2\mu & + & 3\nu & = & 0\\ & & 2\mu & + & 3\nu & = & 0\\ \lambda & + & 2\mu & + & \nu & = & 0\end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{cccl} \lambda & = & 0 & \quad (L_1-L_2)\\ \nu & = & 0 & \quad (L_1-L_3)\\ \mu & = & 0 & \end{array}\right.
\end{aligned}
$$

Donc la famille $\mathscr{E}$ est libre, et pour des raisons de dimension c'est une base de $\mathbb{R}^3$.

4. Le plus simple est d'utiliser les matrices de passage :

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{E}}(f)=\operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{E}}(id)\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\operatorname{Mat}_{\mathscr{E},\mathscr{B}}(id)=P^{-1}AP,$$

où P désigne la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{E}$:

$$P=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&2&3\\1&2&1\end{pmatrix}$$

On calcule rapidement que $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, d'où :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ \frac{11}{4} & 10 & \frac{27}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5

1.
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(p \circ p) = \big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(p)\big)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{E}}(p)$$

   Donc p est un projecteur.

2. (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base de E donc $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Vect}\big(\{p(e_1), p(e_2), p(e_3), p(e_4)\}\big)$
   $= \mathrm{Vect}\big(\{e_1, \frac{1}{3}(e_2 + e_3 + e_4)\}\big) = \mathrm{Vect}\big(\{e_1, (e_2 + e_3 + e_4)\}\big)$.

3. D'après le théorème du rang :
$$\dim(E) = \dim\big(\mathrm{Im}(p)\big) + \dim\big(\mathrm{Ker}(p)\big)$$
   D'où $\dim\big(\mathrm{Ker}(p)\big) = \dim(E) - \dim\big(\mathrm{Im}(p)\big) = 4 - 2 = 2$.

4. Il suffit de trouver deux vecteurs non colinéaires du noyau pour en avoir une base.
   Ici, on a $p(e_2) = p(e_3) = p(e_4)$, on peut donc en déduire que $e_2 - e_3$ et $e_2 - e_4$ sont des éléments du noyau, non colinéaires car $\mathscr{E}$ est une base de E donc une famille libre. D'où
$$\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Vect}\big(\{e_2 - e_3, e_2 - e_4\}\big)$$
   .

Exercice 6

1. $X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$; en utilisant l'équation de récurrence $u_{n+3} = -u_{n+2} + 4u_{n+1} + 4u_n$ on obtient
$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} X_n$$
   Si l'on note cette matrice M, on constate par une récurrence évidente que $X_n = M^n X_0$.

2.
$$P_M(X) = \begin{vmatrix} -1 - X & 4 & 4 \\ 1 & -X & 0 \\ 0 & 1 & -X \end{vmatrix}$$

En développant selon la première ligne par exemple, on obtient :

$$\begin{aligned} P_M(X) &= (-1-X)\begin{vmatrix} -X & 0 \\ 1 & -X \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -X \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & -X \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-X-1)X^2 - 4.(-X) + 4 = -(X^3+X^2-4X-4) \\ &= -(X+1)(X^2-4) = -(X+1)(X+2)(X-2). \end{aligned}$$

$P_M(X)$ est scindé à racines simples, donc la matrice M est diagonalisable. Cherchons des vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1} \Longleftrightarrow M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rrrcl} -x & +4y & +4z & = & -x \\ x & & & = & -y \\ & y & & = & -z \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} y & = & -x \\ z & = & x \end{array}\right.$$

Donc $E_{-1} = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-2} \Longleftrightarrow M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rrrcl} -x & +4y & +4z & = & -2x \\ x & & & = & -2y \\ & y & & = & -2z \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -2y \\ y & = & -2z \end{array}\right.$$

Donc $E_{-2} = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{2} \Longleftrightarrow M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rrrcl} -x & +4y & +4z & = & 2x \\ x & & & = & 2y \\ & y & & = & 2z \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 2y \\ y & = & 2z \end{array}\right.$$

Donc $E_{2} = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.

Ainsi, on peut écrire $M = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3. On a donc $M^n = PD^nP^{-1}$. D étant diagonale, $D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$. Il reste à calculer P^{-1}, par exemple à l'aide d'un pivot de Gauss.

$$P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rrrcl} x & +4y & +4z & = & a \\ -x & -2y & +2z & = & b \\ x & +y & +z & = & c \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2+L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{rrrcl} x & +4y & +4z & = & a \\ & 2y & +6z & = & a+b \\ & -3y & -3z & = & -a+c \end{array}\right.$$

$$\underset{L_2\leftarrow L_2+2L_3}{\iff} \left\{\begin{array}{rrrcl} x & +4y & +4z & = & a \\ & -4y & & = & -a+b+2c \\ & -3y & -3z & = & -a+c \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{lclll} a & = & -\frac{1}{3}a & & +\frac{4}{3}c \\ y & = & \frac{1}{4}a & -\frac{1}{4}b & -\frac{1}{2}c \\ z & = & \frac{1}{12}a & +\frac{1}{4}b & +\frac{1}{6}c \end{array}\right.$$

D'où $P^{-1} = \dfrac{1}{12}\begin{pmatrix} -4 & 0 & 16 \\ 3 & -3 & -6 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

On a donc :

$$\begin{aligned} M^n &= \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ -1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 0 & 16 \\ 3 & -3 & -6 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{12}\begin{pmatrix} (-1)^n & 4(-2)^n & 4.2^n \\ -(-1)^n & -2(-2)^n & 2.2^n \\ (-1)^n & (-2)^n & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -4 & 0 & 16 \\ 3 & -3 & -6 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{12}\begin{pmatrix} -4(-1)^n+12(-2)^n+4.2^n & -12(-2)^n+12.2^n & 16(-1)^n-24(-2)^n+8.2^n \\ 4(-1)^n-6(-2)^n+2.2^n & 6(-2)^n+6.2^n & -16(-1)^n+12(-2)^n+4.2^n \\ -4(-1)^n+3(-2)^n+2^n & -3(-2)^n+3.2^n & 16(-1)^n-6(-2)^n+2.2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La dernière ligne de cette magnifique équation nous livre :

$$u_n = \frac{1}{12}\big(\big[-4(-1)^n+3(-2)^n+2^n\big]u_2+\big[-3(-2)^n+3.2^n\big]u_1+[16(-1)^n-6(-2)^n+2.2^n]u_0\big)$$

soit, avec les valeurs de l'énoncé :

$$u_n = \frac{1}{12}(-4(-1)^n+3(-2)^n+2^n-3(-2)^n+3.2^n) = \frac{(-1)^{n+1}+2^n}{3}$$

On remarque au passage que cela correspond bien aux valeurs données.