EPITA

Mathématiques

Partiel S3

Décembre 2023

Durée : 3 heures

Nom :

Prénom :

Classe :

NOTE :

Le barème est sur 40 points. La note se ramenée à une note sur 20 par une simple division par 2.

Consignes :

- Lire l'énoncé entier avant de commencer. Il y a en tout 6 exercices.
- Documents et calculatrices interdits.
- Répondre directement sur les feuilles jointes, dans les espaces prévus. Aucune autre feuille ne sera corrigée.
- Ne pas écrire au crayon de papier.

Exercice 1 (5.5 points)

Dans $E = \mathbb{R}^3$, considérons la famille $\mathcal{F} = \big(\varepsilon_1{=}(1,-1,2), \varepsilon_2{=}(-1,4,1), \varepsilon_3{=}(1,-2,1)\big)$.

1. Cette famille $\mathcal{F}$ est-elle une base de E ? Sinon, en extraire une sous-famille libre maximale et la compléter pour obtenir une base de E. On note $\mathcal{B}'$ la base obtenue.

2. Déterminer les coordonnées dans $\mathcal{B}'$ du vecteur $u = (2,0,6)$

3. Donner la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 2 (6.5 points)

Considérons l'application linéaire $f : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ P & \longmapsto & \left(P(1), \int_0^2 P(x)\,\mathrm{d}x\right) \end{cases}$

1. Donner la matrice de f dans les bases canoniques $(1, X, X^2)$ au départ et $((1,0),(0,1))$ à l'arrivée.

....
....
....
....

2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et en déduire sa dimension.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$ et en déduire sa dimension.

....
....
....
....
....
....
....

4. Énoncer le théorème du rang et vérifier que vos résultats sont compatibles avec ce théorème.

....
....
....

5. Trouver l'ensemble S de tous les polynômes $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tels que $f(P) = (3, 8)$.

....
....
....
....
....
....

Exercice 3 : une démonstration de cours (5 points)

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimensions n et p non nulles.

Donnons-nous $\mathcal{B}_1 = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de F et $\mathcal{B}_2 = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$ une base de G et considérons la famille

$$\mathcal{F} = (e_1, \cdots, e_n, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$$

obtenue par concaténation de $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$.

Montrer que $F \cap G = \{0_E\} \Longrightarrow \mathcal{F}$ est libre.

Exercice 4 : construction d'un projecteur (8 points)

On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}$. On considère les sous-espaces vectoriels

$$F = \{(x, y, z) \in E,\, x + 2y - z = 0\} \qquad \text{et} \qquad G = \left\{(x, y, z) \in E,\, \left| \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 0 \\ x + y - z & = & 0 \end{array} \right. \right\}$$

1. Trouver une base de F et une base de G.

2. Montrer que $E = F \oplus G$.

3. D'après la question précédente, on sait que pour tout $u \in E$, il existe un unique $(v, w) \in F \times G$ tel que $u = v + w$.

   Considérons l'endomorphisme $p : u \longmapsto w$.

   (a) Supposons que $u \in F$. Que vaut $p(u)$? Justifier.

(b) Supposons que $u \in G$. Que vaut $p(u)$? Justifier.

....
....

(c) Soit $\mathcal{B}'$ la base de E obtenue par concaténation des bases de F et de G trouvées à la question 1. Déterminer la matrice de p dans cette base $\mathcal{B}'$ au départ et à l'arrivée. Notons A' cette matrice.

....
....
....
....

(d) Soit A la matrice de p dans la base canonique au départ et à l'arrivée. Donner la relation matricielle qui permet de calculer A. **On ne demande pas de faire le calcul de A.**

....
....

Exercice 5 : résolution d'un système différentiel (7 points)

On cherche les fonctions réelles x et y dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$x(0) = 1, \quad y(0) = 2 \qquad \text{et} \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & -5x(t) + 4y(t) \\ y'(t) & = & -6x(t) + 5y(t) \end{array} \right.$$

Pour cela, on définit la fonction vectorielle $u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (x(t), y(t)) \end{array} \right.$ et sa fonction dérivée $u' : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & (x'(t), y'(t)) \end{array} \right.$.

On rappelle que, pour tout $(z_0, a) \in \mathbb{R}^2$, l'unique fonction réelle dérivable z vérifiant

$$z(0) = z_0 \qquad \text{et} \qquad \forall t \in \mathbb{R},\ z'(t) = az(t)$$

est la fonction $z : t \longmapsto z_0 e^{at}$.

1. Déterminer $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u'(t) = f\big(u(t)\big)$, et donner sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

....
....
....
....
....

2. Dans $\mathbb{R}^2$, on considère la base canonique $\mathcal{B}_1 = \big(e_1{=}(1,0), e_2{=}(0,1)\big)$ et une autre base $\mathcal{B}_2 = \big(\varepsilon_1{=}(1,1), \varepsilon_2{=}(2,3)\big)$.

(a) Donner la matrice de passage P de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$ et son inverse P^{-1}.

....
....
....
....

(b) Trouver les coordonnées de $u(0) = (1, 2)$ dans la base $\mathcal{B}_2$.

....
....
....
....

(c) Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_2$ au départ et à l'arrivée.

....

....

....

....

....

....

....

....

(d) Notons $X_2(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ et $X_2'(t) = \begin{pmatrix} x_2'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix}$ les colonnes constituées des coordonnées dans la base $\mathcal{B}_2$ des vecteurs $u(t)$ et $u'(t)$. Trouver une relation matricielle donnant $X_2'(t)$ en fonction de $X_2(t)$.

....

....

....

....

....

....

....

....

(e) En déduire les fonctions $t \longmapsto x_2(t)$ et $t \longmapsto y_2(t)$.

....

....

....

....

....

....

....

....

(f) En déduire les fonctions $t \longmapsto x(t)$ et $t \longmapsto y(t)$.

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Exercice 6 : diagonalisation de matrices carrées (8 points)

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 4 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -5 & -8 & -5 \\ 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer **sous forme factorisée** les polynômes caractéristiques de A et de B. Vérifier que les valeurs propres de A sont -1 et 2, puis que celles de B sont -3 et 2.

2. Les matrices A et B sont-elles diagonalisables dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$? Si oui, donner P et D.
Vous prendrez soin de votre rédaction.