Corrigé du partiel S3

Exercice 1 (5.5 points)

Dans $E = \mathbb{R}^3$, considérons la famille $\mathcal{F} = \big(\varepsilon_1{=}(1,-1,2), \varepsilon_2{=}(-1,4,1), \varepsilon_3{=}(1,-2,1)\big)$.

1. Cette famille $\mathcal{F}$ est-elle une base de E ? Sinon, en extraire une sous-famille libre maximale et la compléter pour obtenir une base de E. On note $\mathcal{B}'$ la base obtenue.

   La famille est liée car $-2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 3\varepsilon_3 = 0_E$. Ainsi par exemple, $\operatorname{Vect}\mathcal{F} = \operatorname{Vect}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ où $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est libre.
   Pour obtenir une base de E, complétons cette dernière famille en y ajoutant le vecteur $\varepsilon_4 = (0,0,1)$. Montrons que la famille $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_4)$ est une base de E.

   - $\mathcal{B}'$ est libre : pour tout $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$,

   $$\begin{aligned} a\varepsilon_1 + b\varepsilon_2 + c\varepsilon_4 = 0_E \quad &\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} a-b &=& 0 \\ -a+4b &=& 0 \\ 2a+b+c &=& 0 \end{array} \right. \\ &\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} a-b &=& 0 \\ 3b &=& 0 \quad (E_2+E_1) \\ 2a+b+c &=& 0 \end{array} \right. \\ &\Longrightarrow \ a=b=c=0 \end{aligned}$$

   - $\mathcal{B}'$ est génératrice de E. En effet,

   $$\left. \begin{array}{c} \mathcal{B}' \text{ libre} \\ \operatorname{Card}(\mathcal{B}') = 3 = \dim(E) \end{array} \right\} \Longrightarrow \mathcal{B}' \text{ génératrice de } E$$

   Ainsi, $\mathcal{B}'$ est une base de E.

2. Déterminer les coordonnées dans $\mathcal{B}'$ du vecteur $u = (2,0,6)$

   $u = (2,0,6) = \frac{8}{3}(1,-1,2) + \frac{2}{3}(-1,4,1) = \frac{8}{3}\varepsilon_1 + \frac{2}{3}\varepsilon_2 + 0\varepsilon_4$.

   Les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}'$ sont donc $\left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}, 0\right)$.

3. Donner la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

   La matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 (6.5 points)

Considérons l'application linéaire $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ P & \longmapsto & \left(P(1), \displaystyle\int_0^2 P(x)\,\mathrm{d}x\right) \end{array} \right.$

1. Donner la matrice de f dans les bases canoniques $\left(1, X, X^2\right)$ au départ et $\big((1,0),(0,1)\big)$ à l'arrivée.

   Si $P = 1$, alors $P(1) = 1$ et $\displaystyle\int_0^2 P(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 1\,\mathrm{d}x = 2$, donc $f(1) = (1,2)$.

   Si $P = X$, alors $P(1) = 1$ et $\displaystyle\int_0^2 P(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 2$, donc $f(X) = (1,2)$.

   Si $P = X^2$, alors $P(1) = 1$ et $\displaystyle\int_0^2 P(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3}$, donc $f\left(X^2\right) = \left(1, \dfrac{8}{3}\right)$.

   Finalement, la matrice de f est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & \frac{8}{3} \end{pmatrix}$.

2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et en déduire sa dimension.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}(f) &= \left\{a_0+a_1X+a_2X^2 \in \mathbb{R}_2[X], \middle| \begin{array}{rcl} a_0+a_1+a_2 &=& 0 \\ 2a_0+2a_1+\frac{8}{3}a_2 &=& 0 \end{array}\right\} \\
&= \left\{a_0+a_1X+a_2X^2 \in \mathbb{R}_2[X], \middle| \begin{array}{rcll} a_0+a_1+a_2 &=& 0 & \\ \frac{2}{3}a_2 &=& 0 & (E_2-2E_1) \end{array}\right\} \\
&= \left\{a_0+a_1X+a_2X^2 \in \mathbb{R}_2[X], a_0=-a_1 \text{ et } a_2=0\right\} \\
&= \left\{a_1(X-1), a_1 \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \mathrm{Vect}(X-1)
\end{aligned}$$

Comme $(X-1)$ est une famille libre, c'est une base de $\mathrm{Ker}(f)$. Ainsi, $\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big)=1$.

3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$ et en déduire sa dimension.

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\,\underbrace{\big((1,2),(1,2),(1,\tfrac{8}{3})\big)}_{\text{Liée}} = \mathrm{Vect}\,\underbrace{\big((1,2),(1,\tfrac{8}{3})\big)}_{\text{Libre}}$$

Ainsi, une base de $\mathrm{Im}(f)$ est $\big((1,2),(1,\frac{8}{3})\big)$ et donc $\dim\big(\mathrm{Im}(f)\big)=2$.

4. Énoncer le théorème du rang et vérifier que vos résultats sont compatibles avec ce théorème.

Théorème du rang : si $f \in \mathcal{L}(E,F)$ où E est de dimension finie, alors $\dim(E) = \dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(f)\big)$.

Ici, $E=\mathbb{R}_2[X]$, $\dim(E)=3$, $\dim\big(\mathrm{Ker}(f)\big)=1$ et $\dim\big(\mathrm{Im}(f)\big)=2$. On a bien $3=1+2$.

5. Trouver l'ensemble S de tous les polynômes $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tels que $f(P)=(3,8)$.

On remarque que $P=3X^2$ est une solution particulière. Donc pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$P \in S \Longleftrightarrow f(P)=f(3X^2) \Longleftrightarrow f(P-3X^2)=(0,0) \Longleftrightarrow P-3X^2 \in \mathrm{Ker}(f)$$

Ainsi, $S=\left\{3X^2+k(X-1), k\in\mathbb{R}\right\}$.

Exercice 3 : une démonstration de cours (5 points)

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimensions n et p non nulles.

Donnons-nous $\mathcal{B}_1=(e_1,\cdots,e_n)$ une base de F et $\mathcal{B}_2=(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_p)$ une base de G et considérons la famille

$$\mathcal{F}=(e_1,\cdots,e_n,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_p)$$

obtenue par concaténation de $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$.

Montrer que $F\cap G=\{0_E\} \Longrightarrow \mathcal{F}$ est libre.

Supposons que $F\cap G=\{0_E\}$ et considérons $(a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_p)\in\mathbb{R}^{n+p}$ tel que

$$a_1e_1+\cdots+a_ne_n+b_1\varepsilon_1+\cdots+b_p\varepsilon_p=0_E$$

On a alors : $a_1e_1+\cdots+a_ne_n=-b_1\varepsilon_1-\cdots-b_p\varepsilon_p$.

Or $\left\{\begin{array}{lcl} (e_1,\cdots,e_n)\in F^n & \Longrightarrow & a_1e_1+\cdots+a_ne_n\in F \\ (\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_p)\in G^p & \Longrightarrow & -b_1\varepsilon_1-\cdots-b_p\varepsilon_p\in G \end{array}\right.$

On en déduit que : $a_1e_1+\cdots+a_ne_n=-b_1\varepsilon_1-\cdots-b_p\varepsilon_p\in F\cap G$.

Or $F\cap G=\{0_E\}$. Ainsi, $a_1e_1+\cdots+a_ne_n=-b_1\varepsilon_1-\cdots-b_p\varepsilon_p=0_E$.

Mais comme $\mathcal{B}_1$ est une base de F, elle est libre. Donc

$$a_1e_1+\cdots+a_ne_n=0_E \Longrightarrow (a_1,\cdots,a_n)=(0,\cdots,0)$$

De même, $\mathcal{B}_2$ est libre et

$$-b_1\varepsilon_1-\cdots-b_p\varepsilon_p=0_E \Longrightarrow (-b_1,\cdots,-b_p)=(0,\cdots,0)\Longrightarrow(b_1,\cdots,b_p)=(0,\cdots,0)$$

Finalement, $(a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_p)=(0,\cdots,0)$. La famille $\mathcal{B}_3$ est donc bien libre.

Exercice 4 : construction d'un projecteur (8 points)

On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}$. On considère les sous-espaces vectoriels

$$F = \{(x, y, z) \in E,\, x + 2y - z = 0\} \qquad \text{et} \qquad G = \left\{(x, y, z) \in E, \left| \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 0 \\ x + y - z & = & 0 \end{array} \right.\right\}$$

1. Trouver une base de F et une base de G.

$$\begin{aligned} F &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\, z = x + 2y\} \\ &= \{(x, y, x + 2y), (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{x(1, 0, 1) + y(0, 1, 2), (x, y) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}\,\underbrace{\big((1, 0, 1), (0, 1, 2)\big)}_{\text{libre}} \end{aligned}$$

Une base de F est donc $\mathcal{B}_1 = \big(\varepsilon_1{=}(1, 0, 1), \varepsilon_2{=}(0, 1, 2)\big)$.

$$\begin{aligned} G &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \left| \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 0 \\ x + y - z & = & 0 \end{array} \right.\right\} \\ &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \left| \begin{array}{rcll} x + y + z & = & 0 & \\ 2z & = & 0 & (E_1 - E_2) \end{array} \right.\right\} \\ &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \left| \begin{array}{rcl} y & = & -x \\ z & = & 0 \end{array} \right.\right\} \\ &= \{x(1, -1, 0), x \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\,\underbrace{\big((1, -1, 0)\big)}_{\text{libre}} \end{aligned}$$

Une base de G est donc $\mathcal{B}_2 = \big(\varepsilon_3{=}(1, -1, 0)\big)$.

2. Montrer que $E = F \oplus G$.

Il suffit de montrer que la famille $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ obtenue par concaténation de $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ est une base de E.

- $\mathcal{B}'$ est libre : pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} a\varepsilon_1 + b\varepsilon_2 + c\varepsilon_3 = 0_E \quad &\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a + c & = & 0 \\ b - c & = & 0 \\ a + 2b & = & 0 \end{array} \right. \\ &\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} a + c & = & 0 & \\ a + b & = & 0 & (E_2 + E_1) \\ a + 2b & = & 0 & \end{array} \right. \\ &\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} a + c & = & 0 & \\ a + b & = & 0 & \\ b & = & 0 & (E_3 - E_2) \end{array} \right. \\ &\Longrightarrow a = b = c = 0 \end{aligned}$$

- $\mathcal{B}'$ est génératrice de E. En effet,

$$\left.\begin{array}{c} \mathcal{B}' \text{ libre} \\ \text{Card}(\mathcal{B}') = 3 = \dim(E) \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathcal{B}' \text{ génératrice de } E$$

Ainsi, $\mathcal{B}'$ est une base de E et donc $F \oplus G = E$.

3. D'après la question précédente, on sait que pour tout $u \in E$, il existe un unique $(v, w) \in F \times G$ tel que $u = v + w$.

Considérons l'endomorphisme $p : u \longmapsto w$.

(a) Supposons que $u \in F$. Que vaut $p(u)$? Justifier.

Si $u \in F$, alors $u = \underbrace{u}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G} \Longrightarrow v = u$ et $w = 0_E \Longrightarrow p(u) = w = 0_E$.

(b) Supposons que $u \in G$. Que vaut $p(u)$? Justifier.

Si $u \in G$, alors $u = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{u}_{\in G} \Longrightarrow v = 0_E$ et $w = u \Longrightarrow p(u) = w = u$.

(c) Soit $\mathcal{B}'$ la base de E obtenue par concaténation des bases de F et de G trouvées à la question 1. Déterminer la matrice de p dans cette base $\mathcal{B}'$ au départ et à l'arrivée. Notons A' cette matrice.

$\varepsilon_1 \in F \Longrightarrow p(\varepsilon_1) = 0_E$. Ainsi, les coordonnées dans $\mathcal{B}'$ de $p(\varepsilon_1)$ sont $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

De même, $\varepsilon_2 \in F \Longrightarrow p(\varepsilon_2) = 0_E$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Enfin, $\varepsilon_3 \in G \Longrightarrow p(\varepsilon_3) = \varepsilon_3 = 0\varepsilon_1 + 0\varepsilon_2 + 1\varepsilon_3$. Ainsi, les coordonnées dans $\mathcal{B}'$ de $p(\varepsilon_3)$ sont $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Finalement, $A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(d) Soit A la matrice de p dans la base canonique au départ et à l'arrivée. Donner la relation matricielle qui permet de calculer A. **On ne demande pas de faire le calcul de A.**

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. On a alors
$A' = P^{-1}AP \Longrightarrow A = PA'P^{-1}$.

Exercice 5 : résolution d'un système différentiel (7 points)

On cherche les fonctions réelles x et y dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$x(0) = 1, \quad y(0) = 2 \qquad \text{et} \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x'(t) &= -5x(t) + 4y(t) \\ y'(t) &= -6x(t) + 5y(t) \end{cases}$$

Pour cela, on définit la fonction vectorielle $u : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \big(x(t), y(t)\big) \end{cases}$ et sa fonction dérivée $u' : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & \big(x'(t), y'(t)\big) \end{cases}$.

On rappelle que, pour tout $(z_0, a) \in \mathbb{R}^2$, l'unique fonction réelle dérivable z vérifiant

$$z(0) = z_0 \qquad \text{et} \qquad \forall t \in \mathbb{R},\ z'(t) = az(t)$$

est la fonction $z : t \longmapsto z_0 e^{at}$.

1. Déterminer $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $u'(t) = f\big(u(t)\big)$, et donner sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

   L'application est $f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (-5x + 4y, -6x + 5y) \end{cases}$

   Sa matrice dans la base canonique (au départ et à l'arrivée) est $A = \begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$

2. Dans $\mathbb{R}^2$, on considère la base canonique $\mathcal{B}_1 = \big(e_1{=}(1,0), e_2{=}(0,1)\big)$ et une autre base $\mathcal{B}_2 = \big(\varepsilon_1{=}(1,1), \varepsilon_2{=}(2,3)\big)$.

   (a) Donner la matrice de passage P de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$ et son inverse P^{-1}.

   $$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   (b) Trouver les coordonnées de $u(0) = (1, 2)$ dans la base $\mathcal{B}_2$.

   Les coordonnées de $u(0)$ dans $\mathcal{B}_2$ sont $X_2(0) = P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   On vérifie d'ailleurs que $u(0) = -\varepsilon_1 + \varepsilon_2$.

(c) Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}_2$ au départ et à l'arrivée.

$f(\varepsilon_1) = (-1,-1) = -\varepsilon_1 + 0\varepsilon_2$, qui a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}_2$.

$f(\varepsilon_2) = (2,3) = 0\varepsilon_1 + \varepsilon_2$, qui a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}_2$.

La matrice de f dans la base $\mathcal{B}_2$ au départ et à l'arrivée est donc $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(d) Notons $X_2(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$ et $X_2'(t) = \begin{pmatrix} x_2'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix}$ les colonnes constituées des coordonnées dans la base $\mathcal{B}_2$ des vecteurs $u(t)$ et $u'(t)$. Trouver une relation matricielle donnant $X_2'(t)$ en fonction de $X_2(t)$.

$$\forall t \in \mathbb{R}, u'(t) = f\big(u(t)\big) \Longrightarrow X_2'(t) = DX_2(t) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_2'(t) & = & -x_2(t) \\ y_2'(t) & = & y_2(t) \end{array} \right.$$

(e) En déduire les fonctions $t \longmapsto x_2(t)$ et $t \longmapsto y_2(t)$.

D'après les questions précédentes, on a :

$$x_2(0) = -1 \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R}, x_2'(t) = -x_2(t) \Longrightarrow x_2(t) = -e^{-t}$$

et de même,

$$y_2(0) = 1 \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R}, y_2'(t) = y_2(t) \Longrightarrow y_2(t) = e^{t}$$

(f) En déduire les fonctions $t \longmapsto x(t)$ et $t \longmapsto y(t)$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, la colonne $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ contient les coordonnées de $u(t)$ dans la base canonique. Or on sait que $X(t) = PX_2(t)$. Ainsi,

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ e^{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-t} + 2e^{t} \\ -e^{-t} + 3e^{t} \end{pmatrix}$$

Finalement, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$x(t) = -e^{-t} + 2e^{t} \qquad \text{et} \qquad y(t) = -e^{-t} + 3e^{t}$$

Exercice 6 : diagonalisation de matrices carrées (8 points)

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 4 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -5 & -8 & -5 \\ 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer **sous forme factorisée** les polynômes caractéristiques de A et de B. Vérifier que les valeurs propres de A sont -1 et 2, puis que celles de B sont -3 et 2.

$$\begin{aligned} P_A(X) &= \begin{vmatrix} 2-X & -4 & 1 \\ 0 & -2-X & 1 \\ 4 & -5 & -X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-X & -2+X & 0 \\ 0 & -2-X & 1 \\ 4 & -5 & -X \end{vmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - L_2) \\ &= \begin{vmatrix} 2-X & 0 & 0 \\ 0 & -2-X & 1 \\ 4 & -1 & -X \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 + C_1) \\ &= (2-X) \times \big[(-2-X)(-X) + 1\big] \\ &= (2-X) \times \underbrace{\big[X^2 + 2X + 1\big]}_{(X+1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_B(X) &= \begin{vmatrix} 2-X & 5 & 5 \\ -5 & -8-X & -5 \\ 5 & 5 & 2-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3-X & 5 & 5 \\ 3+X & -8-X & -5 \\ 0 & 5 & 2-X \end{vmatrix} \quad (C_1 \leftarrow C_1 - C_2) \\
&= \begin{vmatrix} -3-X & 5 & 5 \\ 0 & -3-X & 0 \\ 0 & 5 & 2-X \end{vmatrix} \quad (L_2 \leftarrow L_2 + L_1) \\
&= (-3-X) \times \big[(-3-X)(2-X) - 0\big] = (-3-X)^2(2-X)
\end{aligned}$$

2. Les matrices A et B sont-elles diagonalisables dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$? Si oui, donner P et D.
   Vous prendrez soin de votre rédaction.

- Matrice A :
  $\mathrm{Sp}(A) = \{-1, 2\}$ avec $m(-1) = 2$ et $m(2) = 1$. Donc A est diagonalisable ssi $\dim(E_{-1}) = 2$.

$$\begin{aligned}
E_{-1} &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \left| \begin{array}{rcl} 3x - 4y + z &=& 0 \\ -y + z &=& 0 \\ 4x - 5y + z &=& 0 \end{array} \right. \right\} \\
&= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \left| \begin{array}{rcll} z &=& y & (E_2) \\ 4x &=& 4y & (E_3) \\ 0y &=& 0 & (E_1) \end{array} \right. \right\} \\
&= \{y(1,1,1), y \in \mathbb{R}\} \\
&= \mathrm{Vect}\big((1,1,1)\big)
\end{aligned}$$

  Ainsi, $\dim(E_{-1}) = 1 \neq m(-1)$ et A n'est pas diagonalisable.

- Matrice B :
  $\mathrm{Sp}(B) = \{-3, 2\}$ avec $m(-3) = 2$ et $m(2) = 1$. Donc B est diagonalisable ssi $\dim(E_{-3}) = 2$.

$$\begin{aligned}
E_{-3} &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \left| \begin{array}{rcl} 5x + 5y + 5z &=& 0 \\ -5x - 5y - 5z &=& 0 \\ 5x + 5y + 5z &=& 0 \end{array} \right. \right\} \\
&= \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, z = -x - y\big\} \\
&= \{x(1,0,-1) + y(0,1,-1), (x,y) \in \mathbb{R}^2\} \\
&= \mathrm{Vect}\,\underbrace{\big((1,0,-1),(0,1,-1)\big)}_{\text{libre}}
\end{aligned}$$

  Ainsi, $\dim(E_{-3}) = 2 = m(-3)$ et B est diagonalisable.
  De plus,

$$\begin{aligned}
E_2 &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \left| \begin{array}{rcl} 5y + 5z &=& 0 \\ -5x - 10y - 5z &=& 0 \\ 5x + 5y &=& 0 \end{array} \right. \right\} \\
&= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \left| \begin{array}{rcll} z &=& -y & \\ x &=& -y & (E_3) \\ 0y &=& 0 & (E_2) \end{array} \right. \right\} \\
&= \{y(-1,1,-1), y \in \mathbb{R}\} \\
&= \mathrm{Vect}\big((-1,1,-1)\big)
\end{aligned}$$

  Ainsi, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.