EPITA

Mathématiques

Partiel S3

Décembre 2021

Durée : 3 heures

Nom :

Prénom :

Classe :

NOTE :

Consignes :

- Documents et calculatrices interdits.
- Répondre directement sur les feuilles jointes, dans les espaces prévus. Aucune autre feuille ne sera corrigée.
- Ne pas écrire au crayon de papier.

Exercice 1 (3,5 points)

Dans $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}$, on considère la famille $\mathcal{F} = \{\varepsilon_1{=}(1,-1,2),\ \varepsilon_2{=}(2,1,-3),\ \varepsilon_3{=}(4,-1,1)\}$.

1. Cette famille est-elle une base de E ? Sinon, en extraire une sous-famille libre maximale et la compléter pour obtenir une base de E. On note $\mathcal{B}'$ la base obtenue.

2. Déterminer les coordonnées dans $\mathcal{B}'$ du vecteur $u = (3, 3, -8)$.

3. Donner la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 2 (3,5 points)

Soit $f \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^3\right)$ définie par sa matrice dans la base canonique au départ et à l'arrivée : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

1. Montrer que f est un projecteur.

2. Donner une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

3. Donner une base de $\mathrm{Im}(f)$.

4. Énoncer le théorème du rang et vérifier la cohérence de vos résultats avec ce théorème.

5. Soit $\mathcal{B}'$ la concaténation des bases de $\mathrm{Ker}(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$ trouvées aux questions 2 et 3. On admet sans démonstration que cette famille $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ au départ et à l'arrivée.

Exercice 3 (5 points)

Soit l'application linéaire $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ Q & \longmapsto & \big(Q(0),\, Q(1),\, Q(2)\big) \end{array} \right.$

1. Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques $\{1, X, X^2\}$ au départ et $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ à l'arrivée. On note A cette matrice.

2. Considérons dans $\mathbb{R}_2[X]$ les polynômes $Q_0 = \dfrac{(X-1)(X-2)}{2}$, $Q_1 = -X(X-2)$ et $Q_2 = \dfrac{X(X-1)}{2}$.
   (a) Donner les valeurs de $Q_i(0)$, $Q_i(1)$ et $Q_i(2)$ pour chaque $i \in \{0,1,2\}$ (sans détailler les calculs).

   (b) Montrer que la famille $\mathcal{B}' = \{Q_0, Q_1, Q_2\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

[suite du cadre page suivante]

(c) Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ au départ et la base canonique à l'arrivée. On note A' cette matrice.

(d) Montrer que f est bijective et donner la matrice de f^{-1} dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ au départ, $\mathcal{B}'$ à l'arrivée.

3. En déduire la matrice de f^{-1} dans les bases canoniques au départ et à l'arrivée.

Exercice 4 (4,5 points)

On considère les deux suites réelles (x_n) et (y_n) définies par :

$$x_0 = 3, \quad y_0 = -2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} & = & \frac{3}{4}x_n - \frac{1}{8}y_n \\ y_{n+1} & = & -\frac{1}{2}x_n + \frac{3}{4}y_n \end{cases}$$

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = \{(1,0),\,(0,1)\}$, on définit la suite (u_n) par : $u_n = (x_n, y_n)$. Ainsi par exemple, $u_0 = (3, -2)$.

1. Déterminer $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

2. On considère la base de $\mathbb{R}^2$ suivante : $\mathcal{B}' = \{\varepsilon_1{=}(1,-2),\, \varepsilon_2{=}(1,2)\}$. Écrire la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Puis trouver les coordonnées de u_0 dans $\mathcal{B}'$.

3. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ au départ et à l'arrivée.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $X'_n = \begin{pmatrix} x'_n \\ y'_n \end{pmatrix}$, la matrice colonne constituée des coordonnées de u_n dans $\mathcal{B}'$. Déterminer X'_{n+1} en fonction de X'_n.

5. En déduire les coordonnées de u_n dans la base $\mathcal{B}'$, puis $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n$.

Exercice 5 (4 points)

Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 10 & -9 & 10 \\ 6 & -6 & 7 \end{pmatrix}$

1. Calculer les polynômes caractéristiques de A et de B, **sous forme factorisée**.
   Vérifier que les valeurs propres de A sont 1 et 2, puis que celles de B sont -1 et 1.

[suite du cadre page suivante]

2. Les matrices A et B sont-elles diagonalisables dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$? Si oui, donner P et D.
   N.B. : l'obtention des sous-espaces propres sous forme de sous-espaces engendrés doit découler d'un raisonnement clair et non pas d'une manière hasardeuse en prenant directement des valeurs particulières.

[suite du cadre page suivante]