EPITA

Mathématiques

Partiel S3

Décembre 2021

Durée : 3 heures

Nom :

Prénom :

Classe :

NOTE :

Consignes :

- Documents et calculatrices interdits.
- Répondre directement sur les feuilles jointes, dans les espaces prévus. Aucune autre feuille ne sera corrigée.
- Ne pas écrire au crayon de papier.

Exercice 1 (3,5 points)

Dans $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}$, on considère la famille $\mathcal{F} = \{\varepsilon_1=(1,-1,2),\ \varepsilon_2=(2,1,-3),\ \varepsilon_3=(4,-1,1)\}$.

1. Cette famille est-elle une base de E ? Sinon, en extraire une sous-famille libre maximale et la compléter pour obtenir une base de E. On note $\mathcal{B}'$ la base obtenue.

* $\mathcal{F}$ n'est pas libre car $2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_3 = 0_E$.
  Ainsi, ce n'est pas une base de E.

* $\text{Vect}\,\mathcal{F} = \text{Vect}\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Une sous-famille libre maximale est $\mathcal{F}' = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$.
  Comme $\text{Card}(\mathcal{F}') < \dim(E)$, ajoutons un vecteur :
  Soit $\mathcal{F}'' = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \underbrace{(0,1,0)}_{\varepsilon_4}\}$

* $\mathcal{F}''$ libre : $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$,

$$a\varepsilon_1 + b\varepsilon_2 + c\varepsilon_4 = 0_E \Rightarrow \begin{cases} a + 2b = 0 \\ -a + b + c = 0 \\ 2a - 3b = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a + b + c = 0 & (Eq\,2) \\ a + 2b = 0 & (Eq\,1) \\ -7b = 0 & (Eq\,3 - 2Eq\,1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = b = c = 0$$

* $\left.\begin{array}{l} \mathcal{F}'' \text{ libre} \\ \text{Card}(\mathcal{F}'') = \dim(E) \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{F}''$ génératrice et donc base de E.

2. Déterminer les coordonnées dans $\mathcal{B}'$ du vecteur $u = (3, 3, -8)$.

$u = -\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 0\,\varepsilon_4$

Les coordonnées de u sont donc $X' = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

3. Donner la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 (3,5 points)

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ définie par sa matrice dans la base canonique au départ et à l'arrivée : $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

1. Montrer que f est un projecteur.

La matrice de $f \circ f$ est $A \times A = A$

Ainsi, $f \circ f = f$

2. Donner une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{ (x,y,z) \in E, \left| \begin{array}{l} 2x - y + z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -3x + 3y - 2z = 0 \end{array} \right. \right\}$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in E, \left| \begin{array}{ll} 2x - y + z = 0 & \\ 3x + z = 0 & (Eq2 + 2Eq1) \\ 3x + z = 0 & (Eq3 + 3Eq1) \end{array} \right. \right\}$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in E, \left| \begin{array}{l} z = -3x \\ y = 2x + z = -x \end{array} \right. \right\}$$

$$= \{ x(1,-1,-3),\ x \in \mathbb{R} \} = \mathrm{Vect}\underbrace{\{(1,-1,-3)\}}_{\text{Libre}}$$

Une base de $\mathrm{Ker}(f)$ est donc $\{(1,-1,-3)\}$

3. Donner une base de $\mathrm{Im}(f)$.

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\underbrace{\{(2,-1,-3),(-1,2,3),(1,-1,-2)\}}_{\text{Liée : } (2,-1,-3)-(-1,2,3)-3(1,-1,-2)=(0,0,0)}$$

$$= \mathrm{Vect}\{(2,-1,-3),(-1,2,3)\}$$

Une base de $\mathrm{Im}(f)$ est $\{(2,-1,-3),(-1,2,3)\}$

4. Énoncer le théorème du rang et vérifier la cohérence de vos résultats avec ce théorème.

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$ où E est de dimension finie. Alors :

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$$

Ici, $3 = 1 + 2$

5. Soit $\mathcal{B}'$ la concaténation des bases de $\mathrm{Ker}(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$ trouvées aux questions 2 et 3. On admet sans démonstration que cette famille $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ au départ et à l'arrivée.

$$\mathcal{B}' = \{\underbrace{(1,-1,-3)}_{\varepsilon_1}, \underbrace{(2,-1,-3)}_{\varepsilon_2}, \underbrace{(-1,2,3)}_{\varepsilon_3}\}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(\varepsilon_1) = 0\varepsilon_1 + 0\varepsilon_2 + 0\varepsilon_3 \\ f(\varepsilon_2) = 0\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + 0\varepsilon_3 \\ f(\varepsilon_3) = 0\varepsilon_1 + 0\varepsilon_2 + \varepsilon_3 \end{array}\right\} \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 (5 points)

Soit l'application linéaire $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ Q & \longmapsto & (Q(0),\, Q(1),\, Q(2)) \end{array} \right.$

1. Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques $\{1, X, X^2\}$ au départ et $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ à l'arrivée. On note A cette matrice.

$f(1) = (1,1,1)$
$f(X) = (0,1,2)$
$f(X^2) = (0,1,4)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

2. Considérons dans $\mathbb{R}_2[X]$ les polynômes $Q_0 = \dfrac{(X-1)(X-2)}{2}$, $Q_1 = -X(X-2)$ et $Q_2 = \dfrac{X(X-1)}{2}$.

   (a) Donner les valeurs de $Q_i(0)$, $Q_i(1)$ et $Q_i(2)$ pour chaque $i \in \{0,1,2\}$ (sans détailler les calculs).

$Q_0(0) = 1$, $Q_0(1) = 0$ $Q_0(2) = 0$
$Q_1(0) = 0$ $Q_1(1) = 1$ $Q_1(2) = 0$
$Q_2(0) = 0$ $Q_2(1) = 0$ $Q_2(2) = 1$

   (b) Montrer que la famille $\mathcal{B}' = \{Q_0, Q_1, Q_2\}$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

* $\mathcal{B}'$ est libre :

$$aQ_0 + bQ_1 + cQ_2 = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} aQ_0(0) + bQ_1(0) + cQ_2(0) = 0 \\ aQ_0(1) + bQ_1(1) + cQ_2(1) = 0 \\ aQ_0(2) + bQ_1(2) + cQ_2(2) = 0 \end{array} \right.$$

[suite du cadre page suivante]

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

$*$ $\left.\begin{array}{l} Card(\mathcal{B}') = \dim(E) \\ \mathcal{B}' \text{ libre} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathcal{B}'$ est génératrice

$\Rightarrow \mathcal{B}'$ base de E.

(c) Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ au départ et la base canonique à l'arrivée. On note A' cette matrice.

$f(\varphi_0) = (1,0,0)$
$f(\varphi_1) = (0,1,0)$
$f(\varphi_2) = (0,0,1)$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(d) Montrer que f est bijective et donner la matrice de f^{-1} dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ au départ, $\mathcal{B}'$ à l'arrivée.

$*$ f injective : Soit $P \in \ker(f)$. Écrivons P dans $\mathcal{B}'$:
$P = a\varphi_0 + b\varphi_1 + c\varphi_2$.
Alors $f(P) = (0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow P = 0$

$*$ f surjective : $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $(a,b,c) = f(a\varphi_0 + b\varphi_1 + c\varphi_2)$

Matrice de f^{-1} : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (dans $\mathcal{B}'$ à l'arrivée)

3. En déduire la matrice de f^{-1} dans les bases canoniques au départ et à l'arrivée.

$f^{-1}(1,0,0) = \varphi_0 = 1 - \frac{3}{2}X + \frac{1}{2}X^2$
$f^{-1}(0,1,0) = \varphi_1 = 2X - X^2$
$f^{-1}(0,0,1) = \varphi_2 = -\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}X^2$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/2 & 2 & -1/2 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 (4,5 points)

On considère les deux suites réelles (x_n) et (y_n) définies par :

$$x_0 = 3, \quad y_0 = -2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} &= \frac{3}{4}x_n - \frac{1}{8}y_n \\ y_{n+1} &= -\frac{1}{2}x_n + \frac{3}{4}y_n \end{cases}$$

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = \{(1,0), (0,1)\}$, on définit la suite (u_n) par : $u_n = (x_n, y_n)$. Ainsi par exemple, $u_0 = (3, -2)$.

1. Déterminer $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto \left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{8}y \; , \; -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y\right) \end{cases}$$

2. On considère la base de $\mathbb{R}^2$ suivante : $\mathcal{B}' = \{\varepsilon_1{=}(1,-2), \varepsilon_2{=}(1,2)\}$. Écrire la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Puis trouver les coordonnées de u_0 dans $\mathcal{B}'$.

$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

$u_0 = (3,-2)$. On résoud $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_0 \\ y'_0 \end{pmatrix}$

On trouve $\begin{pmatrix} x'_0 \\ y'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad (u_0 = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$

3. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ au départ et à l'arrivée.

$f(\varepsilon_1) = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \; , \; -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right) = (1, -2) = \varepsilon_1 + 0\,\varepsilon_2$

$f(\varepsilon_2) = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4} \; , \; -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 1\right) = 0\,\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\,\varepsilon_2$

La matrice de f dans $\mathcal{B}'$ est donc $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $X'_n = \begin{pmatrix} x'_n \\ y'_n \end{pmatrix}$, la matrice colonne constituée des coordonnées de u_n dans $\mathcal{B}'$. Déterminer X'_{n+1} en fonction de X'_n.

$u_{n+1} = f(u_n) \Rightarrow X'_{n+1} = A' X'_n \Rightarrow \begin{pmatrix} x'_{n+1} \\ y'_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_n \\ y'_n \end{pmatrix}$

Ainsi, $\begin{cases} x'_{n+1} = x'_n \\ y'_{n+1} = \frac{1}{2} y'_n \end{cases}$

5. En déduire les coordonnées de u_n dans la base $\mathcal{B}'$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$.

* D'après 4. on a

$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x'_n = x'_0 = 2 \\ y'_n = y'_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{cases}$

* $x'_n = 2$ et $y'_n \longrightarrow 0$

Donc $u_n = x'_n \varepsilon_1 + y'_n \varepsilon_2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\varepsilon_1 = (2,-4)$

D'où $\lim x_n = 2$ et $\lim y_n = -4$

Exercice 5 (4 points)

Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 10 & -9 & 10 \\ 6 & -6 & 7 \end{pmatrix}$

1. Calculer les polynômes caractéristiques de A et de B, **sous forme factorisée**.
Vérifier que les valeurs propres de A sont 1 et 2, puis que celles de B sont -1 et 1.

$P_A(X) = \begin{vmatrix} -1-X & -1 & -1 \\ 1 & 2-X & 0 \\ 5 & 2 & 4-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-X & -1 & 0 \\ 1 & 2-X & -2+X \\ 5 & 2 & 2-X \end{vmatrix} \quad C_3 \leftarrow C_3 - C_2$

$= \begin{vmatrix} -1-X & -1 & 0 \\ 6 & 4-X & 0 \\ 5 & 2 & 2-X \end{vmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_3$

Donc $P_A(X) = (2-X) \begin{vmatrix} -1-X & -1 \\ 6 & 4-X \end{vmatrix} = (2-X)\left[(-1-X)(4-X)+6\right]$

$= (2-X)\underbrace{\left[X^2 - 3X + 2\right]}_{(X-1)(X-2)} = -(X-1)(X-2)^2$

[suite du cadre page suivante]

$$P_B(X) = \begin{vmatrix} 3-X & -2 & 2 \\ 10 & -9-X & 10 \\ 6 & -6 & 7-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-X & -2 & 2 \\ 1-X & -9-X & 10 \\ 0 & -6 & 7-X \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 + C_2$$

$$= \begin{vmatrix} 1-X & -2 & 2 \\ 0 & -7-X & 8 \\ 0 & -6 & 7-X \end{vmatrix} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

Donc $P_B(X) = (1-X)\left[(-7-X)(7-X)+48\right] = (1-X)\left[X^2-49+48\right]$

$= (1-X)\underbrace{(X^2-1)}_{(X-1)(X+1)}$

$P_B(X) = -(X-1)^2(X+1)$

2. Les matrices A et B sont-elles diagonalisables dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$? Si oui, donner P et D.
N.B. : l'obtention des sous-espaces propres sous forme de sous-espaces engendrés doit découler d'un raisonnement clair et non pas d'une manière hasardeuse en prenant directement des valeurs particulières.

* $Sp(A) = \{1, 2\}$ avec $m(1)=1$ et $m(2)=2$

Donc A diagonalisable ssi $\dim(E_2)=2$

$E_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ \begin{vmatrix} -3x-y-z=0 \\ x=0 \\ 5x+2y+2z=0 \end{vmatrix} \right\}$

$= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ \begin{vmatrix} x=0 \\ y=-z \end{vmatrix} \right\}$

$= \{(0,-z,z), z \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}\{(0,-1,1)\}$

Ainsi, $\dim(E_2)=1 \neq m(2)$ et A n'est pas diagonalisable.

* $Sp(B) = \{1, -1\}$ avec $m(1)=2$ et $m(-1)=1$

Donc B est diagonalisable ssi $\dim(E_1)=2$

[suite du cadre page suivante]

$$E_1 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \left| \begin{array}{l} 2x - 2y + 2z = 0 \\ 10x - 10y + 10z = 0 \\ 6x - 6y + 6z = 0 \end{array} \right. \right\}$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ y = x + z \right\} = \left\{ (x, x+z, z), (x,z) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$= \left\{ x(1,1,0) + z(0,1,1), \ (x,z) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$= \mathrm{Vect} \left\{ \underbrace{(1,1,0), (0,1,1)}_{\text{Libre}} \right\}$$

Donc $\dim(E_1) = m(1)$ et B est diagonalisable.

$$E_{-1} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \left| \begin{array}{l} 4x - 2y + 2z = 0 \\ 10x - 8y + 10z = 0 \\ 6x - 6y + 8z = 0 \end{array} \right. \right\}$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \left| \begin{array}{l} 2x - y + z = 0 \\ 5x - 4y + 5z = 0 \\ 3x - 3y + 4z = 0 \end{array} \right. \right\}$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \left| \begin{array}{ll} 2x - y + z = 0 & \\ 3x - z = 0 & (4Eq1 - Eq2) \\ 3x - z = 0 & (3Eq1 - Eq2) \end{array} \right. \right\}$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \begin{array}{l} z = 3x \\ y = 2x + z = 5x \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ x(1,5,3), \ x \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left\{ (1,5,3) \right\}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$