## **EPITA**

# Mathématiques

Partiel S3

Janvier 2021

Durée: 3 heures

Nom:	
Prénom :	
Classe:	
NOTE:	
Consignes:  — Documents et calculatrices interdits.	

— Répondre directement sur les feuilles jointes, dans les espaces prévus. Aucune autre feuille ne sera corrigée.

— Ne pas écrire au crayon de papier.

#### Exercice 1 (4 points)

Tous les ans, les chevaliers de la Table Ronde partent à la quête du Graal. À chaque tentative, leur probabilité de réussite a une valeur  $p \in ]0,1[$ . On suppose que les résultats des tentatives (succès ou non) sont indépendants.

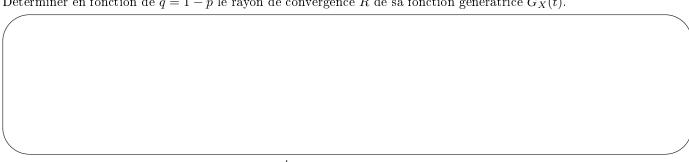
Considérons la variable aléatoire : X =« nombres de tentatives jusqu'à ramener le Graal »

Par exemple, si les chevaliers y parviennent dès leur première tentative, on aura X=1.

1. Déterminer P(X=1), P(X=2) et P(X=3). Puis déterminer P(X=n) pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .



2. Déterminer en fonction de q=1-p le rayon de convergence R de sa fonction génératrice  $G_X(t)$ .



3. Montrer que pour tout  $t \in ]-R, R[\,,\,G_X(t)=\frac{pt}{1-qt}.$ 



4. En déduire l'espérance et la variance de X.

#### Exercice 2 (5 points)

Dans l'espace  $\mathbb{R}^3$  muni de sa base canonique  $\mathcal{B}$ , on considère la famille  $\mathcal{F} = \{(1,2,1),(4,1,2),(2,1,1)\}.$ 

- 1. Montrer que  $\mathcal{F}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
- 2. Soit  $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . On note  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  les coordonnées de u dans  $\mathcal{B}$  et  $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$  ses coordonnées dans  $\mathcal{F}$ .
  - a. Supposons X' connu. En écrivant u comme une combinaison linéaire des éléments de  $\mathcal{F}$ , exprimer X en fonction de X'.

3.

77	nu. Exprimer $X'$ en f				
oto Dla matria	e de passage de ${\cal B}$ à ${\cal J}$	T En utilisant les	auastians prácád	ontos donnon Dot	$D^{-1}$
iote P la matrice	e de passage de <i>B</i> a <i>J</i> —————	En utilisant les	questions precede	entes, donner P et	P

### Exercice 3 (4 points)

Soit  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$  définie par sa matrice dans les bases canoniques :  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ 

1. Donner une base de Ker(f).



3. Énoncer le théorème du rang et vérifier la cohérence de vos résultats avec ce théorème.

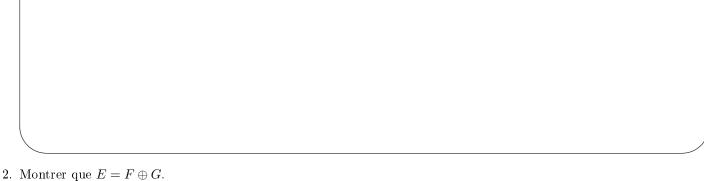
4. En utilisant les résultats précédents, déterminer la dimension de  $\text{Vect}\{(1,-1,3,-3),(1,1,-1,4),(3,1,1,5)\}$ .

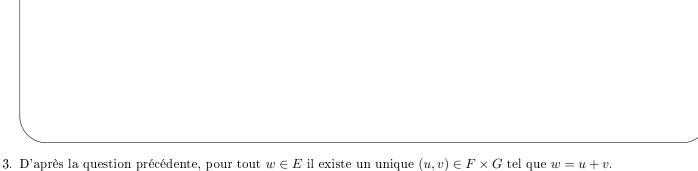
## Exercice 4 (4 points)

Dans l'espace vectoriel  $E = \mathbb{R}^2$  muni de sa base canonique  $\mathcal{B}$ , on considère les sev

$$F = \{(x, y) \in E, x - 2y = 0\}$$
 et  $G = \{(x, y) \in E, x - y = 0\}$ 

1. Donner une base  $\mathcal{B}_1$  de F, puis une base  $\mathcal{B}_2$  de G.





Définissons  $p \in \mathcal{L}(E)$  par : p(w) = v.

a. Soient  $w_1 \in F$  et  $w_2 \in G$ . Que valent  $p(w_1)$  et  $p(w_2)$ ?

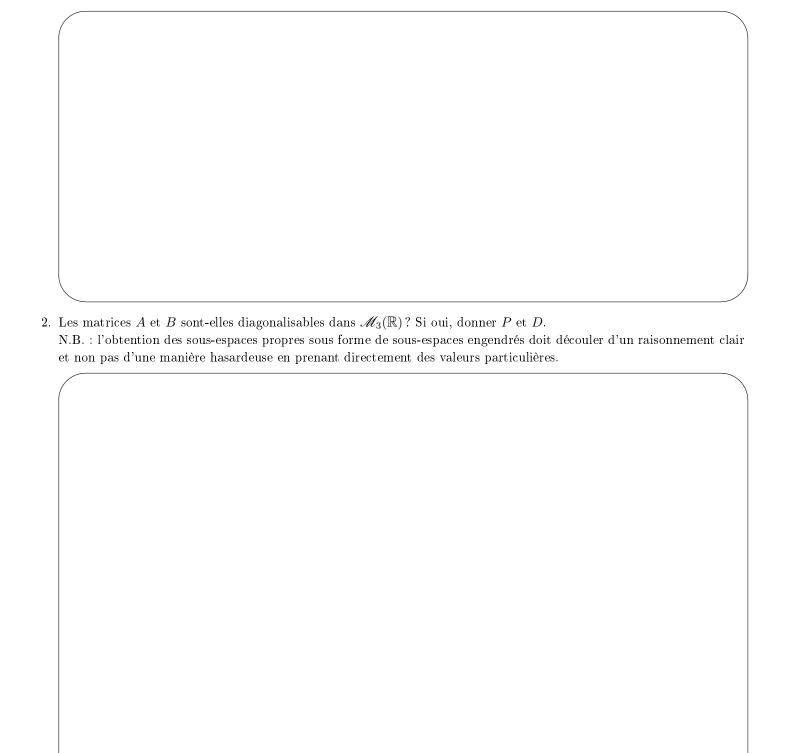
b. On construit une base  $\mathcal{B}'$  par concaténation des bases  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$  obtenues question 1. Déterminer la matrice de p dans cette base  $\mathcal{B}'$ , puis la matrice de p dans la base canonique  $\mathcal{B}$ .

#### Exercice 5 (4 points)

Soient 
$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$
 et  $B = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ -7 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ 

1. Calculer les polynômes caractéristiques de A et de B. Vérifier que les valeurs propres de A sont -1 et 2, puis que celles de B sont -2 et 3.

[suite du cadre page suivante]



[suite du cadre page suivante]