EPITA

Mathématiques

Partiel S3

Janvier 2021

Durée : 3 heures

Nom :

Prénom :

Classe :

NOTE :

Consignes :

- Documents et calculatrices interdits.
- Répondre directement sur les feuilles jointes, dans les espaces prévus. Aucune autre feuille ne sera corrigée.
- Ne pas écrire au crayon de papier.

Exercice 1 (4 points)

Tous les ans, les chevaliers de la Table Ronde partent à la quête du Graal. À chaque tentative, leur probabilité de réussite a une valeur $p \in]0,1[$. On suppose que les résultats des tentatives (succès ou non) sont indépendants.
Considérons la variable aléatoire : $X =$ « nombres de tentatives jusqu'à ramener le Graal »
Par exemple, si les chevaliers y parviennent dès leur première tentative, on aura $X = 1$.

1. Déterminer $P(X{=}1)$, $P(X{=}2)$ et $P(X{=}3)$. Puis déterminer $P(X{=}n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Déterminer en fonction de $q = 1 - p$ le rayon de convergence R de sa fonction génératrice $G_X(t)$.

3. Montrer que pour tout $t \in]-R, R[$, $G_X(t) = \dfrac{pt}{1 - qt}$.

4. En déduire l'espérance et la variance de X.

Exercice 2 (5 points)

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}$, on considère la famille $\mathcal{F} = \big\{(1,2,1),(4,1,2),(2,1,1)\big\}$.

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ les coordonnées de u dans $\mathcal{B}$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ ses coordonnées dans $\mathcal{F}$.

   a. Supposons X' connu. En écrivant u comme une combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{F}$, exprimer X en fonction de X'.

b. Supposons X connu. Exprimer X' en fonction de X.

3. On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{F}$. En utilisant les questions précédentes, donner P et P^{-1}.

Exercice 3 (4 points)

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$ définie par sa matrice dans les bases canoniques : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

1. Donner une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

2. Donner une base de $\mathrm{Im}(f)$.

3. Énoncer le théorème du rang et vérifier la cohérence de vos résultats avec ce théorème.

4. En utilisant les résultats précédents, déterminer la dimension de $\text{Vect}\big\{(1,-1,3,-3),\ (1,1,-1,4),\ (3,1,1,5)\big\}$.

Exercice 4 (4 points)

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}$, on considère les sev

$$F = \{(x,y) \in E,\ x - 2y = 0\} \qquad \text{et} \qquad G = \{(x,y) \in E,\ x - y = 0\}$$

1. Donner une base $\mathcal{B}_1$ de F, puis une base $\mathcal{B}_2$ de G.

2. Montrer que $E = F \oplus G$.

3. D'après la question précédente, pour tout $w \in E$ il existe un unique $(u,v) \in F \times G$ tel que $w = u + v$.
   Définissons $p \in \mathscr{L}(E)$ par : $\quad p(w) = v$.
   a. Soient $w_1 \in F$ et $w_2 \in G$. Que valent $p(w_1)$ et $p(w_2)$?

b. On construit une base $\mathcal{B}'$ par concaténation des bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ obtenues question 1.
Déterminer la matrice de p dans cette base $\mathcal{B}'$, puis la matrice de p dans la base canonique $\mathcal{B}$.

Exercice 5 (4 points)

Soient $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ -7 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

1. Calculer les polynômes caractéristiques de A et de B.
Vérifier que les valeurs propres de A sont -1 et 2, puis que celles de B sont -2 et 3.

[suite du cadre page suivante]

2. Les matrices A et B sont-elles diagonalisables dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$? Si oui, donner P et D.
N.B. : l'obtention des sous-espaces propres sous forme de sous-espaces engendrés doit découler d'un raisonnement clair et non pas d'une manière hasardeuse en prenant directement des valeurs particulières.

[suite du cadre page suivante]