EPITA

Mathématiques

Partiel S3

Janvier 2021

Durée : 3 heures

Nom :

Prénom :

Classe :

Corrigé

NOTE :

Consignes :

- Documents et calculatrices interdits.
- Répondre directement sur les feuilles jointes, dans les espaces prévus. Aucune autre feuille ne sera corrigée.
- Ne pas écrire au crayon de papier.

Exercice 1 (4 points)

Tous les ans, les chevaliers de la Table Ronde partent à la quête du Graal. À chaque tentative, leur probabilité de réussite a une valeur $p \in]0,1[$. On suppose que les résultats des tentatives (succès ou non) sont indépendants.
Considérons la variable aléatoire : X = « nombres de tentatives jusqu'à ramener le Graal »
Par exemple, si les chevaliers y parviennent dès leur première tentative, on aura $X = 1$.

1. Déterminer $P(X{=}1)$, $P(X{=}2)$ et $P(X{=}3)$. Puis déterminer $P(X{=}n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$P(X=1) = p$; $P(X=2) = p(1-p)$, $P(X=3) = p(1-p)^2$, ...

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X=n) = p(1-p)^{n-1}$

2. Déterminer en fonction de $q = 1-p$ le rayon de convergence R de sa fonction génératrice $G_X(t)$.

$G_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n)\, t^n$

D'Alembert : $\frac{P(X=n+1)}{P(X=n)} = \frac{p(1-p)^n}{p(1-p)^{n-1}} = 1-p = q \xrightarrow[n \to +\infty]{} q$

Donc $R = \frac{1}{q}$

3. Montrer que pour tout $t \in]-R, R[$, $G_X(t) = \dfrac{pt}{1-qt}$.

$G_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} p q^{n-1} t^n = pt \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} (qt)^{n-1}}_{\text{Série géométrique : } \frac{1}{1-qt}}$

D'où $G_X(t) = pt \times \frac{1}{1-qt} = \frac{pt}{1-qt}$

4. En déduire l'espérance et la variance de X.

$G_X'(t) = \frac{p(1-qt) - pt(-q)}{(1-qt)^2} = \frac{p}{(1-qt)^2} = p(1-qt)^{-2}$

$G_X''(t) = p \times (-2)(1-qt)^{-3} \times (-q) = \frac{2pq}{(1-qt)^3}$

D'où $E(X) = G_X'(1) = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$

$Var(X) = G_X''(1) + E(X) - E^2(X) = \frac{2pq}{(1-q)^3} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{2q}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}$

$= \frac{2q + \overbrace{p-1}^{-q}}{p^2} = \frac{q}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$

Exercice 2 (5 points)

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}$, on considère la famille $\mathcal{F} = \{(1,2,1),(4,1,2),(2,1,1)\}$.

1. Montrer que $\mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

* $\mathrm{Card}(\mathcal{F}) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$. Il suffit donc de montrer que la famille est libre.

* $\lambda_1(1,2,1) + \lambda_2(4,1,2) + \lambda_3(2,1,1) = (0,0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 & (Eq\,3) \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 & (Eq\,2 - Eq\,3) \\ \lambda_1 = 0 & (2Eq\,3 - Eq\,1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

La famille est donc libre. Elle est aussi génératrice car

$$\left.\begin{array}{l} \dim(\mathrm{Vect}\,\mathcal{F}) = \mathrm{Card}(\mathcal{F}) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3) \\ \mathrm{Vect}\,\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{Vect}\,\mathcal{F} = \mathbb{R}^3$$

2. Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ les coordonnées de u dans $\mathcal{B}$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ ses coordonnées dans $\mathcal{F}$.

   a. Supposons X' connu. En écrivant u comme une combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{F}$, exprimer X en fonction de X'.

$u = (x,y,z) = x'(1,2,1) + y'(4,1,2) + z'(2,1,1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x' + 4y' + 2z' \\ y = 2x' + y' + z' \\ z = x' + 2y' + z' \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} X'$$

b. Supposons X connu. Exprimer X' en fonction de X.

$$\begin{cases} x'+4y'+2z'=x \\ 2x'+y'+z'=y \\ x'+2y'+z'=z \end{cases} \iff \begin{cases} x'+2y'+z'=z & (Eq3) \\ x'-y' = y-z & (Eq2-Eq3) \\ x' = -x+2z & (2Eq3-Eq1) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x' = -x+2z & (Eq3) \\ y' = x'-y+z & (Eq2) \\ \quad = -x-y+3z & \\ z' = -x'-2y'+z & (Eq1) \\ \quad = 3x+2y-7z & \end{cases}$$

$$\iff X' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -7 \end{pmatrix} X$$

3. On note P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{F}$. En utilisant les questions précédentes, donner P et P^{-1}.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -7 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 (4 points)

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$ définie par sa matrice dans les bases canoniques : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

1. Donner une base de Ker(f).

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \left| \begin{array}{l} x + y + 3z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ 3x - y + z = 0 \\ -3x + 4y + 5z = 0 \end{array} \right. \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \left| \begin{array}{lr} x + y + 3z = 0 & \\ 2y + 4z = 0 & (Eq1 + Eq2) \\ -4y - 8z = 0 & (Eq3 - 3Eq1) \\ 7y + 14z = 0 & (Eq4 + 3Eq1) \end{array} \right. \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \left| \begin{array}{l} y = -2z \\ x = -z \end{array} \right. \right\} = \left\{ z \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, z \in \mathbb{R} \right\}$$

Donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}_{\text{Famille libre}}$. Une base de Ker$(f)$ est $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

2. Donner une base de Im(f).

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\underbrace{\{C_1, C_2, C_3\}}_{\text{Famille liée car } -1C_1 - 2C_2 + 1C_3 = 0}$$

$$= \mathrm{Vect}\underbrace{\{C_1, C_2\}}_{\text{Famille libre}}$$

Une base de Im(f) est $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$

3. Énoncer le théorème du rang et vérifier la cohérence de vos résultats avec ce théorème.

Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$, E de dimension finie, alors
$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$$

Ici, $E = \mathbb{R}^3$, $\dim(E) = 3 = \underbrace{1}_{\dim(\mathrm{Ker}(f))} + \underbrace{2}_{\dim(\mathrm{Im}(f))}$

4. En utilisant les résultats précédents, déterminer la dimension de $\mathrm{Vect}\{(1,-1,3,-3),\ (1,1,-1,4),\ (3,1,1,5)\}$.

$\mathrm{Vect}\{(1,-1,3,-3),(1,1,-1,4),(3,1,1,5)\} = \mathrm{Im}(f)$

Sa dimension est 2.

Exercice 4 (4 points)

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}$, on considère les sev

$$F = \{(x, y) \in E,\ x - 2y = 0\} \qquad \text{et} \qquad G = \{(x, y) \in E,\ x - y = 0\}$$

1. Donner une base $\mathcal{B}_1$ de F, puis une base $\mathcal{B}_2$ de G.

$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x = 2y\} = \{y(2,1),\ y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\underbrace{\{(2,1)\}}_{\text{Libre}}$

$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x = y\} = \{y(1,1),\ y \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\underbrace{\{(1,1)\}}_{\text{Libre}}$

Donc $\mathcal{B}_1 = \{(2,1)\}$, $\mathcal{B}_2 = \{(1,1)\}$

2. Montrer que $E = F \oplus G$.

* $F \cap G = \{0_E\}$ – L'inclusion $\supset$ est évidente.

$\subset$: $\forall (x,y) \in E$, $(x,y) \in F \cap G \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $(E_q2 - E_q1)$

$\Rightarrow x = y = 0$

* $F + G = E$: $\left.\begin{array}{l} \dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) = 2 \\ F + G \subset \mathbb{R}^2 \end{array}\right\} \Rightarrow F + G = \mathbb{R}^2$

3. D'après la question précédente, pour tout $w \in E$ il existe un unique $(u, v) \in F \times G$ tel que $w = u + v$.
Définissons $p \in \mathscr{L}(E)$ par : $\quad p(w) = v$.

a. Soient $w_1 \in F$ et $w_2 \in G$. Que valent $p(w_1)$ et $p(w_2)$?

$w_1 = \underbrace{w_1}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G} \Rightarrow p(w_1) = 0_E$

$w_2 = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{w_2}_{\in G} \Rightarrow p(w_2) = w_2$

b. On construit une base $\mathcal{B}'$ par concaténation des bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ obtenues question 1.
Déterminer la matrice de p dans cette base $\mathcal{B}'$, puis la matrice de p dans la base canonique $\mathcal{B}$.

$* \; \mathcal{B}' = \{\underbrace{(2,1)}_{\varepsilon_1}, \underbrace{(1,1)}_{\varepsilon_2}\}$

$$A' = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ p(\varepsilon_1) \quad p(\varepsilon_2) \end{array} \begin{array}{l} - \text{Coef } \varepsilon_1 \\ - \text{Coef } \varepsilon_2 \end{array}$$

$\varepsilon_1 \in F \Rightarrow p(\varepsilon_1) = 0_E = 0\,\varepsilon_1 + 0\,\varepsilon_2$: coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}'$

$\varepsilon_2 \in G \Rightarrow p(\varepsilon_2) = \varepsilon_2 = 0\,\varepsilon_1 + 1\,\varepsilon_2$: coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}'$

$* \; \mathcal{B} = \{\underbrace{(1,0)}_{e_1}, \underbrace{(0,1)}_{e_2}\}$

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ p(e_1) \quad p(e_2) \end{array} \begin{array}{l} - \text{Coef } e_1 \\ - \text{Coef } e_2 \end{array}$$

$e_1 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \Rightarrow p(e_1) = p(\varepsilon_1) - p(\varepsilon_2) = 0_E - (1,1) = -e_1 - e_2$

$e_2 = -\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 \Rightarrow p(e_2) = -p(\varepsilon_1) + 2p(\varepsilon_2) = 0_E + 2(1,1) = 2e_1 + 2e_2$

Exercice 5 (4 points)

Soient $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \\ -7 & 5 & 5 \end{pmatrix}$

1. Calculer les polynômes caractéristiques de A et de B.
   Vérifier que les valeurs propres de A sont -1 et 2, puis que celles de B sont -2 et 3.

$* \; P_A(X) = \begin{vmatrix} 5-X & 3 & -3 \\ -3 & -1-X & 3 \\ 3 & 3 & -1-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-X & 3 & -3 \\ 0 & -1-X & 3 \\ 2-X & 3 & -1-X \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 + C_3$

$$= \begin{vmatrix} 2-X & 3 & -3 \\ 0 & -1-X & 3 \\ 0 & 0 & 2-X \end{vmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$= (2-X)^2(-1-X)$$

Donc P_A est scindé, $Sp(A) = \{-1, 2\}$ avec $m(-1) = 1$, $m(2) = 2$

[suite du cadre page suivante]

$$* \; P_B(X) = \begin{vmatrix} -4-X & 5 & 2 \\ -2 & 3-X & 2 \\ -7 & 5 & 5-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2-X & 5 & 2 \\ 0 & 3-X & 2 \\ -2-X & 5 & 5-X \end{vmatrix} \quad C_1 \leftarrow C_1 + C_3$$

$$= \begin{vmatrix} -2-X & 5 & 2 \\ 0 & 3-X & 2 \\ 0 & 0 & 3-X \end{vmatrix} \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$= (-2-X)(3-X)^2$$

P_B est scindé, $Sp(B) = \{-2, 3\}$ avec $m(-2) = 1$ et $m(3) = 2$

2. Les matrices A et B sont-elles diagonalisables dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$? Si oui, donner P et D.
N.B. : l'obtention des sous-espaces propres sous forme de sous-espaces engendrés doit découler d'un raisonnement clair et non pas d'une manière hasardeuse en prenant directement des valeurs particulières.

$*$ A est diagonalisable ssi $\dim(E_2) = m(2) = 2$

$$E_2 = \mathrm{Ker}(A - 2I) = \mathrm{Ker}\begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ -3 & -3 & 3 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ 3(x+y-z) = 0\}$$

$$= \{(x, y, x+y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$= \{x(1,0,1) + y(0,1,1),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$= \mathrm{Vect}\{(1,0,1), (0,1,1)\}$$

Donc $\dim(E_2) = 2$ et A est diagonalisable

$$E_{-1} = \mathrm{Ker}(A + I) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \begin{vmatrix} 6x + 3y - 3z = 0 \\ -3x + 3z = 0 \\ 3x + 3y = 0 \end{vmatrix} \right\}$$

$$= \{(x, -x, x),\ x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\{(1,-1,1)\}$$

D'où $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

[suite du cadre page suivante]

* B est diagonalisable ssi $\dim(E_3) = 2$

$$E_3 = \mathrm{Ker}(B - 3I) = \left\{(x,y,z),\ \begin{vmatrix} -7x + 5y + 2z = 0 \\ -2x \qquad + 2z = 0 \\ -7x + 5y + 2z = 0 \end{vmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ \begin{vmatrix} x = z & (Eq\,2) \\ 5y = 5z & (Eq\,1) \end{vmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ z(1,1,1),\ z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left\{(1,1,1)\right\}$$

Donc $\dim(E_3) = 1 \neq m(3)$ et B n'est pas diagonalisable.