EPITA

Mathématiques

Partiel (S3)

décembre 2017

Nom :

Prénom :

Entourer le nom de votre professeur de TD : M. Cartailler / M. Euvrard / M. Goron / M. Rodot

Classe :

NOTE :

Exercice 1 (6 points)

Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

A et B sont-elles diagonalisables dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$? Si oui, déterminer D et P.

N.B. : l'obtention des sous-espaces propres sous forme de sous-espaces engendrés doit découler d'un raisonnement clair et non pas d'une manière hasardeuse en prenant directement des valeurs particulières.

[suite du cadre page suivante]

Exercice 2 (4 points)

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ a^2 - a & -a - 1 & a^2 + 1 \end{pmatrix}$.

Discuter de la diagonalisabilité de A dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ suivant les valeurs de a.

N.B. : la diagonalisation dans les cas favorables n'est pas demandée.

[suite du cadre page suivante]

Exercice 3 (4 points)

1. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 P(t)\mathrm{d}t \end{array} \right.$.

   Déterminer la matrice de f relativement aux bases canoniques des espaces de départ et d'arrivée.

2. Soient $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P(X) & \longmapsto & (X^2-1)P''(X) + 2XP'(X) \end{array} \right.$.

   Déterminer la matrice de f relativement à la base canonique $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 4 (4 points)

Soient E un $\mathbb{R}$-ev de dimension finie, F et G deux sev supplémentaires dans E, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de F et $\mathscr{B}' = (f_1, \ldots, f_q)$ une base de G. Montrer, SANS utiliser l'assertion $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$, que la concaténation de $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ est une base de E.

[suite du cadre page suivante]

Exercice 5 (3 points)

Calculer le déterminant de la matrice carrée d'ordre $n \geqslant 2$ suivante : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$.