

# Partiel 1

Durée : trois heures  
Documents et calculatrices non autorisés

Nom : \_\_\_\_\_ Prénom : \_\_\_\_\_ Classe : \_\_\_\_\_

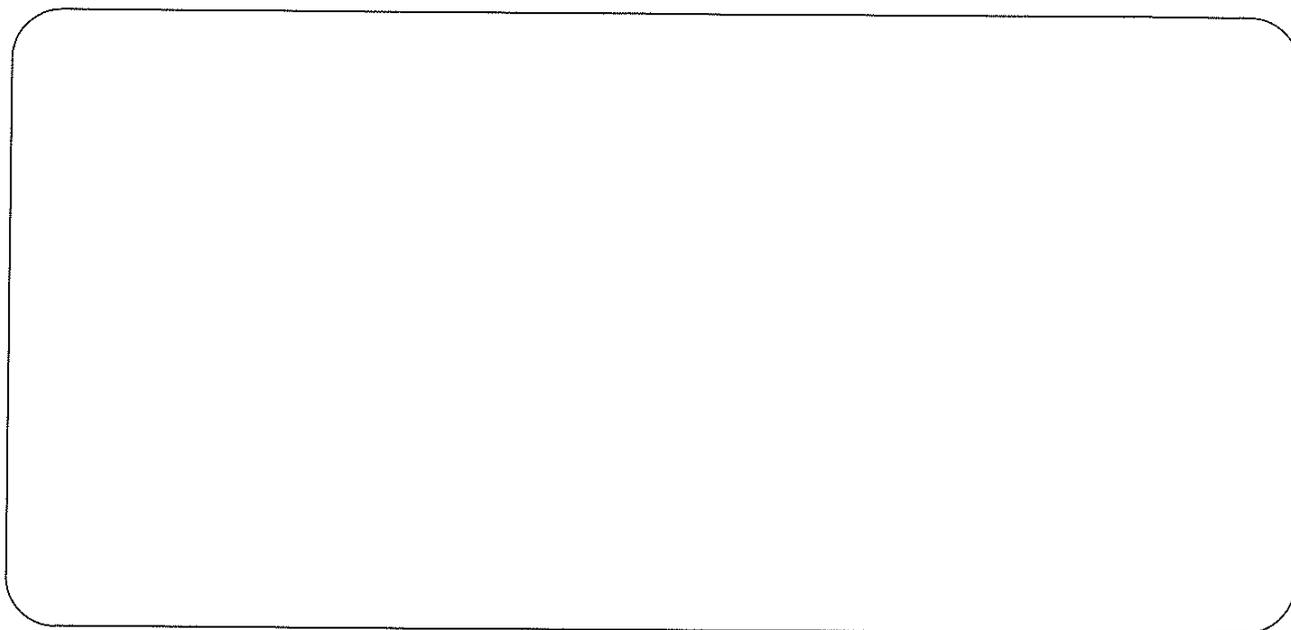
Entourer votre professeur de TD : M. Goron / M. Rodot

## Exercice 1 (5 points)

1. Déterminer, via la règle de d'Alembert, la nature de la série  $\sum \frac{(n!)^2}{(3n)!}$ .

2. Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Déterminer, en fonction de  $k$ , via la règle de d'Alembert, la nature de la série  $\sum \frac{(n!)^2}{(kn)!}$ .

[suite du cadre page suivante]



3. Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Déterminer, via la règle de Cauchy la nature de la série  $\sum \left(\frac{n}{n+a}\right)^{n^2}$ .



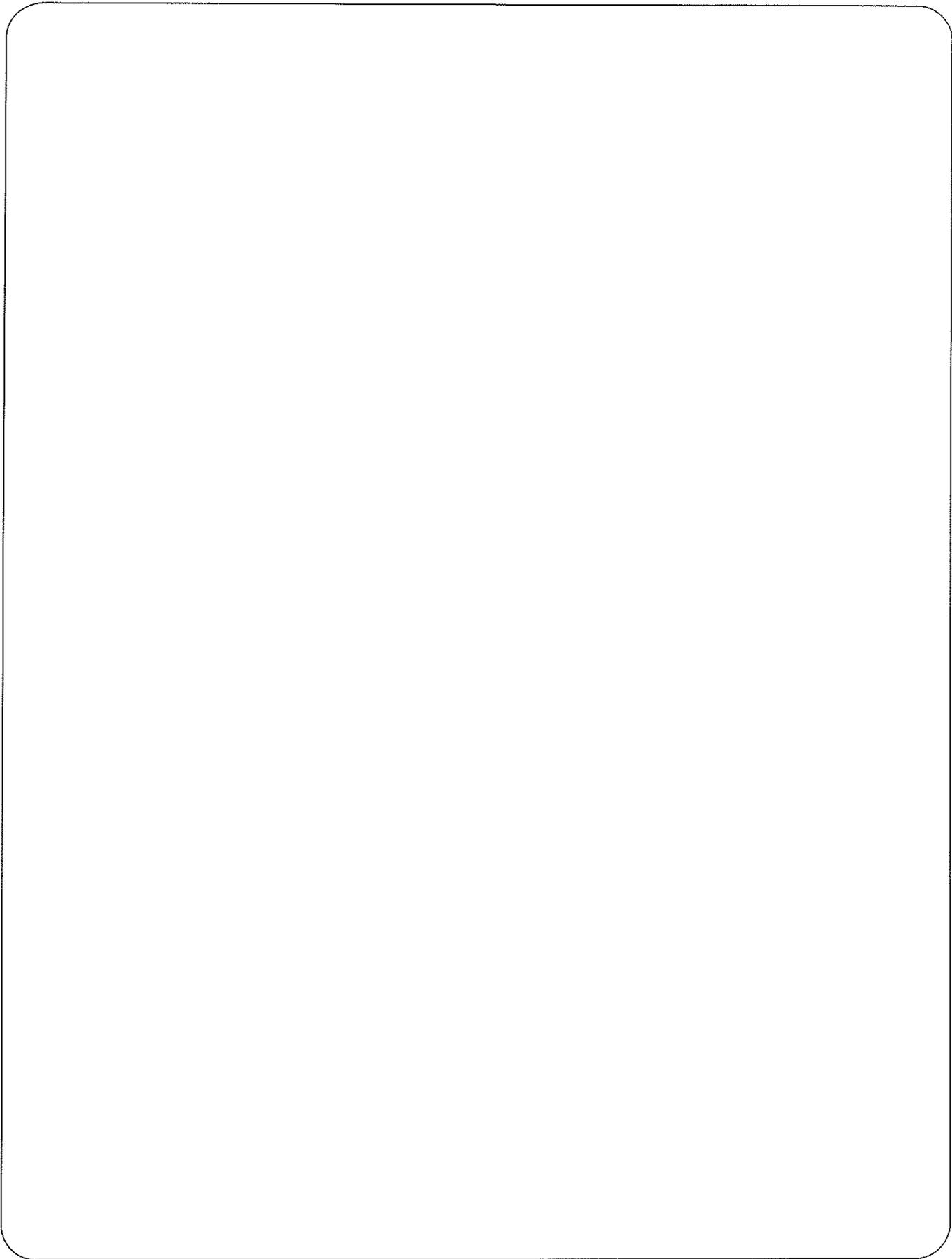
## Exercice 2 (4 points)

Soient  $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ .

$A$  et  $B$  sont-elles diagonalisables dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ? Si oui, déterminer  $D$  et  $P$ .

N.B. : l'obtention des sous-espaces propres sous forme de sous-espaces engendrés doit découler d'un raisonnement clair et non pas d'une manière hasardeuse en prenant directement des valeurs particulières.

[suite du cadre page suivante]



### Exercice 3 (4 points)

Soient  $a \in \mathbb{R}$  et  $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ a-3 & 0 & 1-a \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ . Discuter de la diagonalisabilité de  $A$  dans  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  suivant les valeurs de  $a$ .

N.B. : la diagonalisation dans les cas favorables n'est pas demandée.

### Exercice 4 (4 points)

1. Soit  $f : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] & \rightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ P(X) & \mapsto 3XP(X) - (X^2 - 1)P'(X) \end{cases}$ .

a. Déterminer (sans justificatif) la matrice de  $f$  relativement à la base canonique  $\mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3)$  de  $\mathbb{R}_3[X]$ .

b.  $f$  est-elle bijective ? Justifiez votre réponse.

2. Soient  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  et  $f : \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto AX - XA \end{cases}$ . Déterminer (sans justificatif) la matrice de  $f$  rela-

tivement à la base canonique  $\mathcal{B} = \left( E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$  de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

### Exercice 5 (4 points)

Soient  $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6$  et  $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 2 & d & e \\ 0 & 0 & 2 & f \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

Discuter de la diagonalisabilité de  $A$  suivant les valeurs de  $a, b, c, d, e$  et  $f$ .

[suite du cadre page suivante]

