

Partiel 1

Durée : trois heures
Documents et calculatrices non autorisés

Nom : _____ Prénom : _____ Classe : _____

Consignes :

- aucune autre feuille, que celles agrafées fournies pour répondre, ne sera corrigée.
 - aucune réponse au crayon de papier ne sera corrigée.
-

Exercice 1 (4 points)

1. Déterminer, via la règle de d'Alembert, la nature de la série $\sum u_n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{10^n}{n 4^{2n+1}}$.

2. Déterminer, via la règle de Cauchy, la nature de la série $\sum v_n$ où pour tout entier $n \geq 2$, $v_n = \frac{n}{(\ln(n))^n}$.

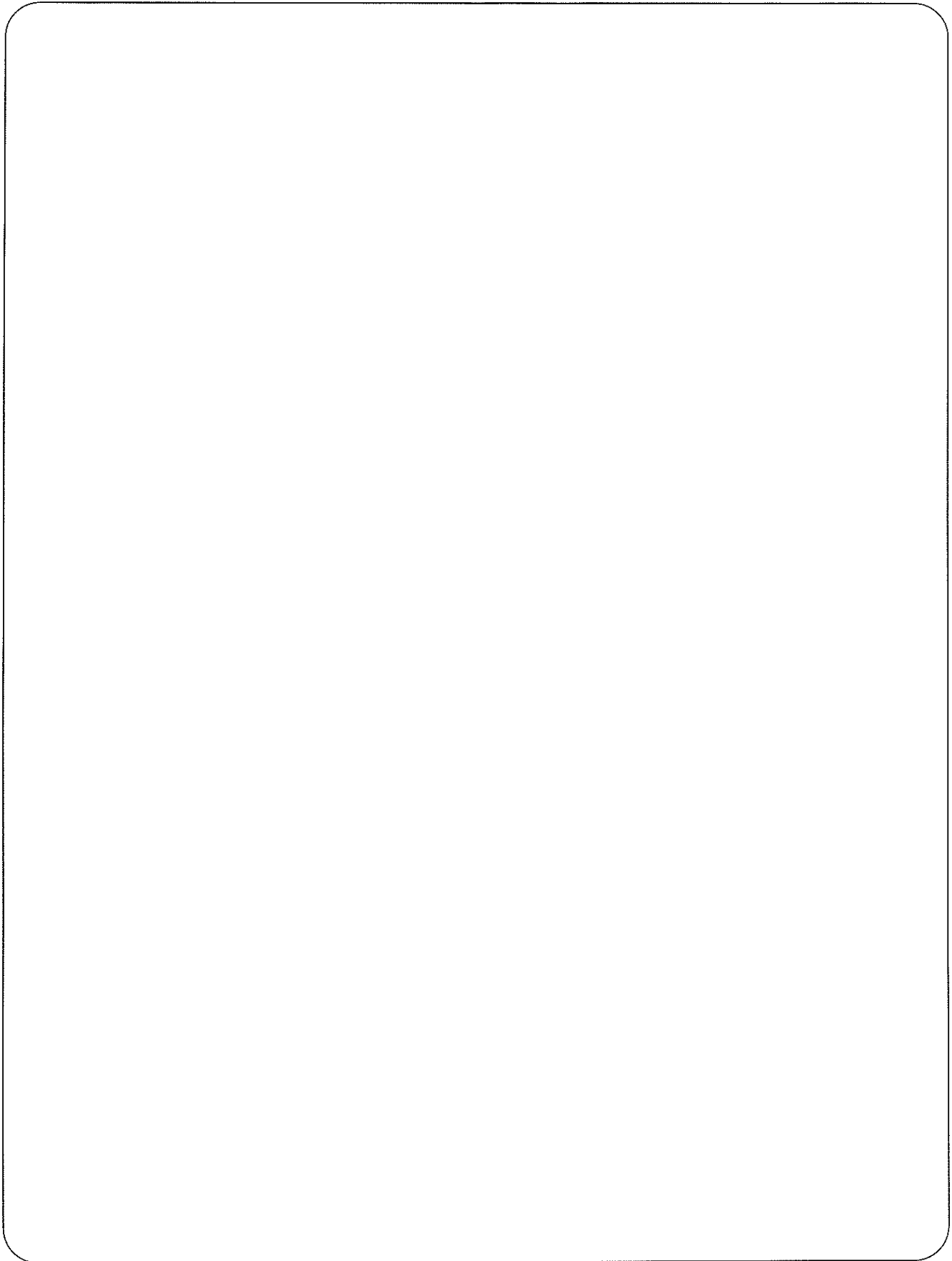
Exercice 2 (4 points)

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 7 & -5 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \end{pmatrix}$.

A et B sont-elles diagonalisables dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? Si oui, déterminer D et P .

N.B. : l'obtention des sous-espaces propres sous forme de sous-espaces engendrés doit découler d'un raisonnement clair et non pas d'une manière hasardeuse en prenant directement des valeurs particulières.

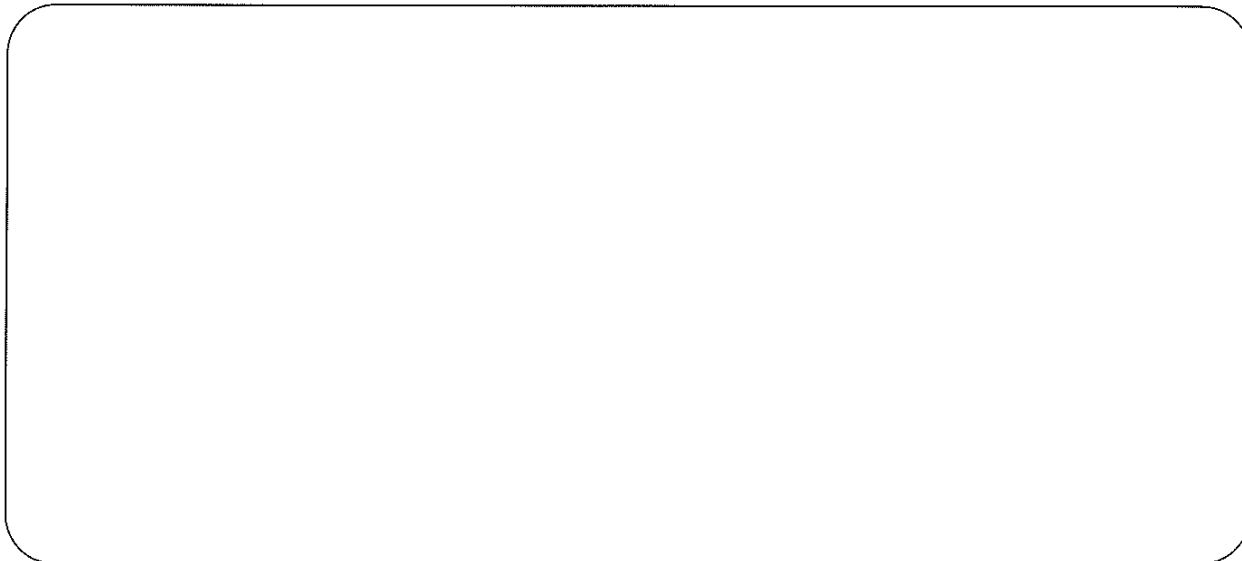
[suite du cadre page suivante]



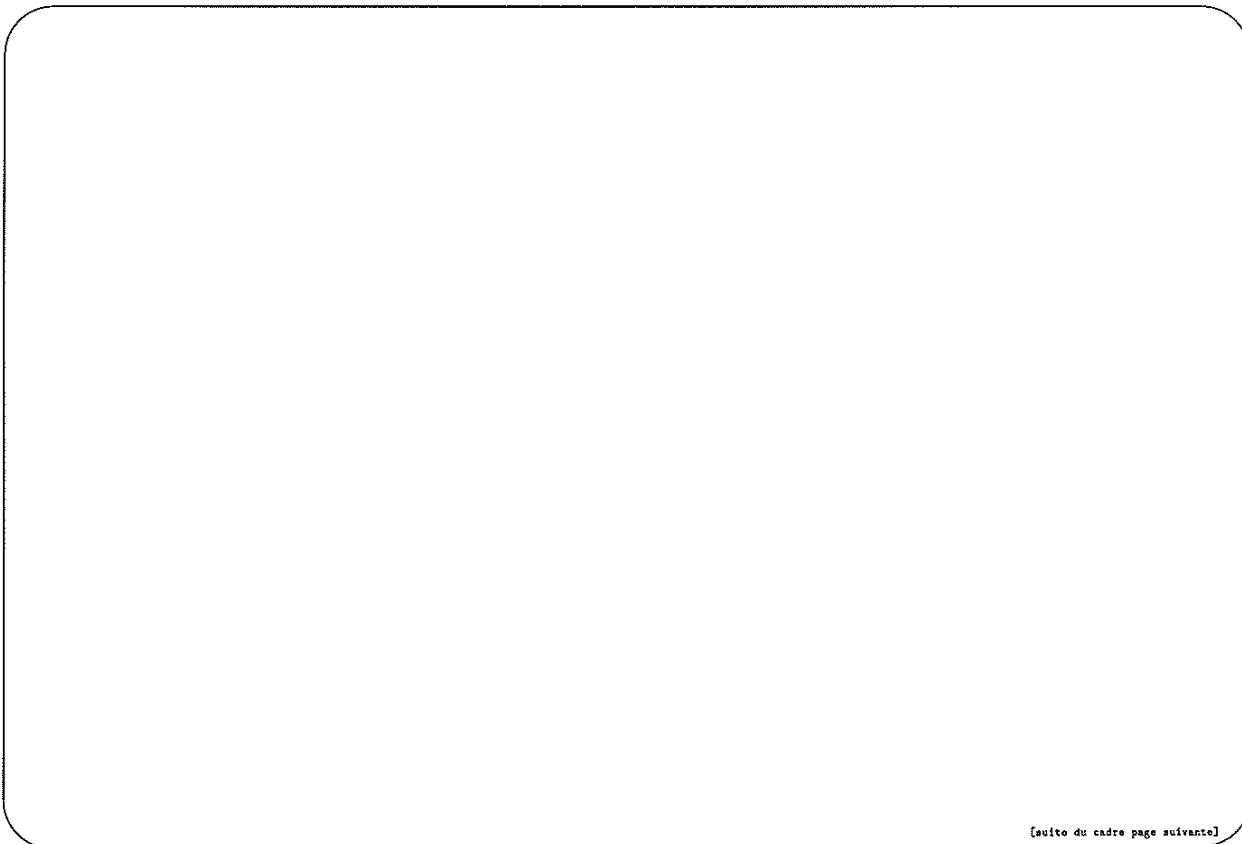
Exercice 3 (3,5 points)

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-a & a-2 & a \end{pmatrix}$.

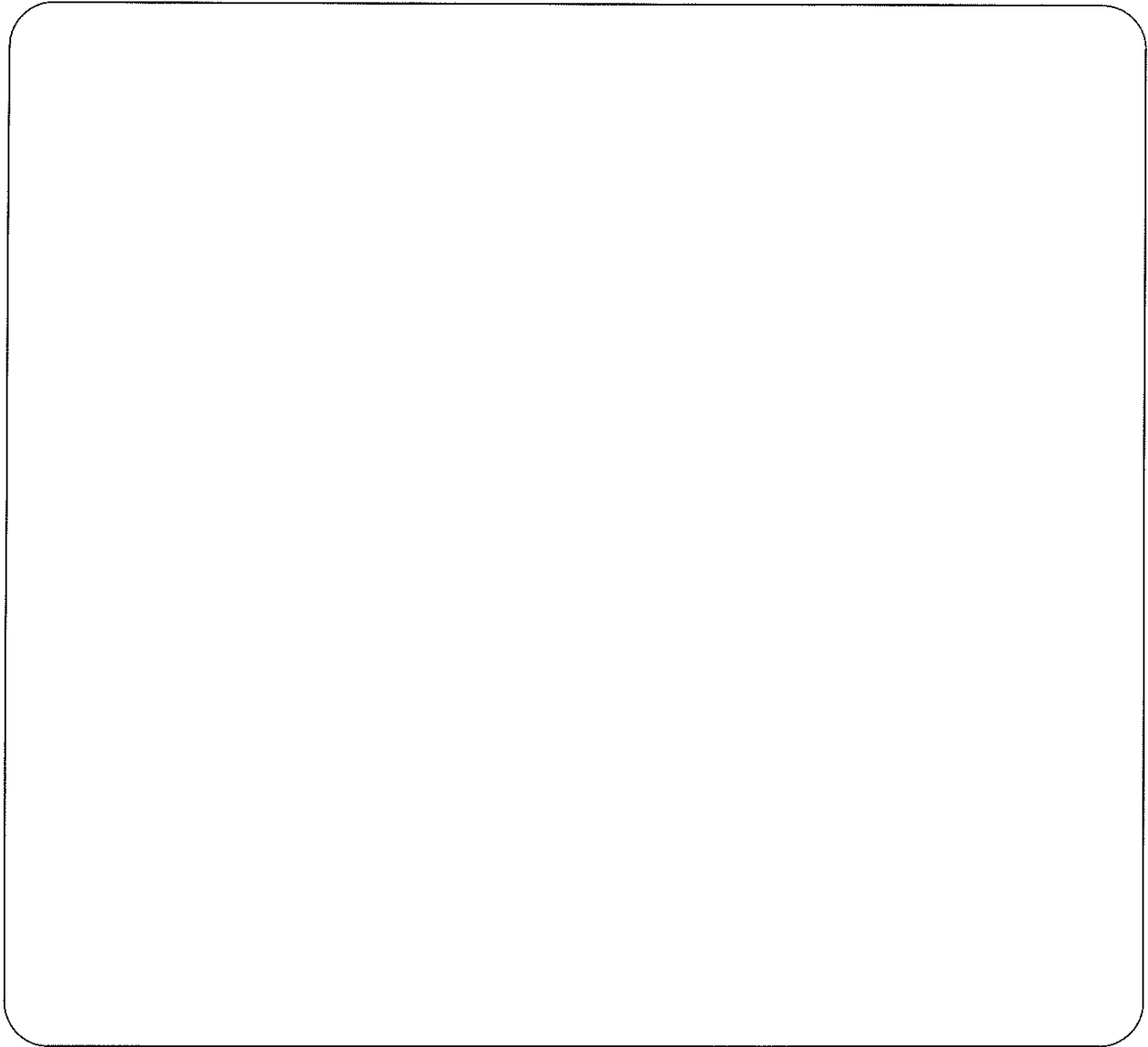
1. Déterminer le polynôme caractéristique de A en choisissant dans \mathcal{P}_A comme première transformation $C_1 \leftarrow C_1 + C_2$.



2. Discuter de la diagonalisabilité de A dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivant les valeurs de a .
N.B. : la diagonalisation dans les cas favorables n'est pas demandée.



[suite du cadre page suivante]



Exercice 4 (3,5 points)

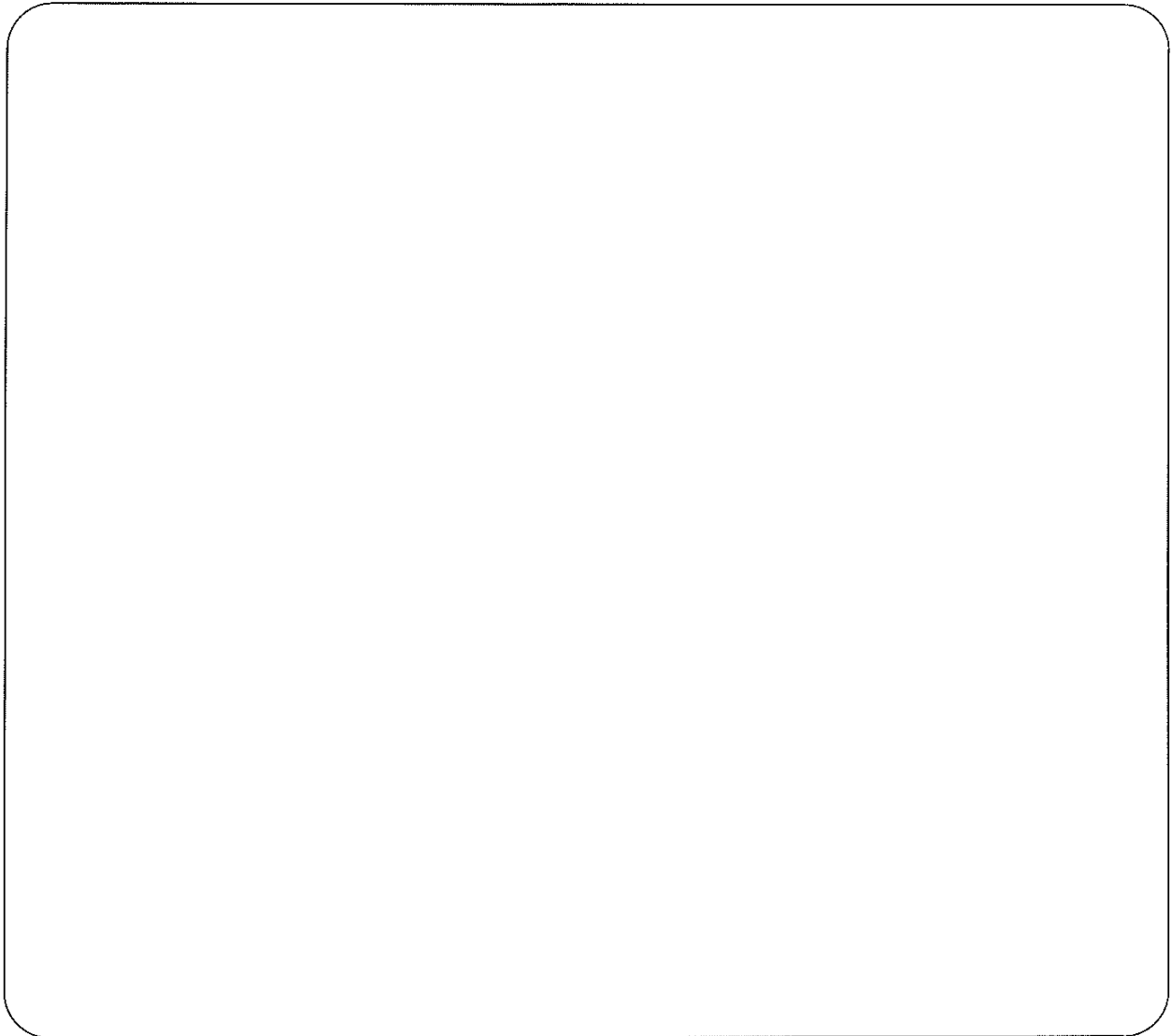
Soit le système d'équations différentielles suivant :
$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + 8y(t) \\ y'(t) = x(t) + 3y(t) \end{cases} .$$

On note $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $X'(t) = AX(t)$.



2. Diagonaliser A en explicitant D et P . On écrira $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, avec $a < b$, où a et b sont à déterminer.



3. [Vérifier que vous avez bien pris $a < b$ dans la matrice D obtenue dans la question précédente]. En déduire $x(t)$ et $y(t)$ en fonction de t .



[suite du cadre page suivante]

Exercice 5 (4 points)

1. Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $f : \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto AM \end{cases}$. Déterminer la matrice de f relativement à la base canonique

$$\mathcal{B} = \left(E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \text{ de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

2. Soit $\Delta : \begin{cases} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \rightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto (a+d)X^2 + (b+c)X + d - c \end{cases}$

Déterminer la matrice de Δ relativement aux bases canoniques de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 6 (2 points)

Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Calculer le déterminant suivant (sous forme factorisée) en précisant les transformations effectuées

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \dots & \dots & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 & \dots & \dots & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & \dots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & \dots & a_n \end{vmatrix}$$