Corrigé du partiel

Exercice 1 (6 points)

Un fournisseur d'accès internet a mis en place un service d'assistance pour aider ses clients, dans le cas où ils ont des problèmes de connexion. Pour tout intervalle de temps d'une heure, on définit la variable aléatoire

$$X = \text{«Nombre d'appels réçus par le service assistance pendant cet intervalle de temps»}$$

On suppose que les nombres d'appels, dans deux intervalles de temps ne se recouvrant pas, sont des variables aléatoires indépendantes. Enfin, on admet que sous cette hypothèse, il existe $\lambda > 0$ tel que $X \rightsquigarrow \text{Poisson}(\lambda)$, c'est à dire que

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ P(X{=}n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$$

Le service d'assistance est ouvert 10 heures par jour (de 9h à 19h), et la valeur de λ est la même pour tout intervalle de temps d'une heure inclus dans les heures d'ouverture.

1. Déterminer la fonction génératrice $G_X(t)$ de la variable X. Exprimer $G_X(t)$ d'abord comme une série entière, puis à l'aide des fonctions usuelles.

   $$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X{=}n)t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}t^n = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

   Donc $G_X(t) = e^{-\lambda}\, e^{\lambda t} = e^{\lambda(t-1)}$.

2. Calculer l'espérance et la variance de X.

   $G'_X(t) = \lambda e^{\lambda(t-1)}$ donc $\mathrm{E}(X) = G'_X(1) = \lambda$

   $G''_X(t) = \lambda^2 e^{\lambda(t-1)}$ donc $\mathrm{Var}(X) = G''_X(1) + \mathrm{E}(X) - \mathrm{E}^2(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$.

3. On considère une journée j et on définit la variable aléatoire

   $$Y = \text{«Nombre d'appels réçu par le service assistance pendant toute cette journée»}$$

   (a) Déterminer la fonction génératrice de Y. Justifier soigneusement.

   On découpe les heures d'ouverture de la journée en 10 périodes d'une heure chacune. Pour $h \in [\![1, 10]\!]$, on définit

   $$X_h = \text{«Nombre d'appels reçus pendant la période } h\text{»}$$

   Alors $Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_{10}$ et les X_h sont indépendantes puisque les périodes d'une heure ne se recouvrent pas.

   Donc $G_Y(t) = G_{X_1}(t) \times \cdots \times G_{X_{10}}(t) = e^{10\lambda(t-1)}$.

   (b) En déduire la loi de Y.

   On déduit de la question 3.a que Y suit une loi de Poisson de paramètre 10λ :

   $$Y(\Omega) = \mathbb{N} \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ P(Y{=}n) = e^{-10\lambda}\frac{(10\lambda)^n}{n!}$$

Exercice 2 (6.5 points)

Considérons l'application linéaire $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ P & \longmapsto & \big(P(1), P(2)\big) \end{array} \right.$

1. Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. Écrire les conditions sur (a, b, c) pour que $P \in \text{Ker}(f)$. En déduire une base de $\text{Ker}(f)$.

$$\begin{aligned}
P \in \text{Ker}(f) &\iff \begin{cases} a+b+c &= 0 \quad \big(P(1)=0\big) \\ 4a+2b+c &= 0 \quad \big(P(2)=0\big) \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a+b+c &= 0 \\ 3a+b &= 0 \quad \big(\text{Eq}_2 - \text{Eq}_1\big) \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} b &= -3a \\ c &= -a-b = 2a \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc $\text{Ker}(f) = \{a(X^2 - 3X + 2), a \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\,\big(X^2 - 3X + 2\big)$.
Comme $\big(X^2 - 3X + 2\big)$ est une famille libre, c'est une base de $\text{Ker}(f)$.

2. Déterminer le rang de f, puis $\text{Im}(f)$.

D'après le théorème du rang, on a : $\dim\big(\mathbb{R}_2[X]\big) = \dim\big(\text{Ker}(f)\big) + \dim\big(\text{Im}(f)\big)$.

Donc $\text{rg}(f) = \dim\big(\text{Im}(f)\big) = 3 - 1 = 2$.

Ainsi, $\text{Im}(f) \subset \mathbb{R}^2$ et $\dim\big(\text{Im}(f)\big) = \dim\big(\mathbb{R}^2\big) \Longrightarrow \text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$.

3. Soient dans $\mathbb{R}_2[X]$ les polynômes $P_1 = -X + 2$ et $P_2 = X - 1$. Calculer $P_i(1)$ et $P_i(2)$ pour $i \in \{1, 2\}$.

$P_1(1) = 1,\ P_1(2) = 0$ et $P_2(1) = 0,\ P_2(2) = 1$.

4. Proposer une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$ telle que la matrice de f dans cette base $\mathcal{B}$ au départ et la base canonique à l'arrivée soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Soit la base $\mathcal{B} = \big(P_1, P_2, P_3{=}X^2 - 3X + 2\big)$. Cette famille est bien une base. De plus, d'après les questions 1 et 3,

$$f(P_1) = (1, 0), \quad f(P_2) = (0, 1) \quad \text{et} \quad f(P_3) = (0, 0)$$

La matrice de f dans cette base $\mathcal{B}$ au départ et la base canonique à l'arrivée est donc bien la matrice A demandée.

5. Trouver l'ensemble S de tous les polynômes $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tels que $f(P) = (42, 1)$.

Écrivons P dans la base $\mathcal{B}$: $P = aP_1 + bP_2 + cP_3$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Les coordonnées de $f(P)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ sont alors données par $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Ainsi, $f(P) = (a, b)$. Donc :

$$S = \{aP_1 + bP_2 + cP_3 \text{ tel que } a = 42 \text{ et } b = 1\} = \{42P_1 + P_2 + cP_3,\ c \in \mathbb{R}\} = \{-41X + 83 + cP_3,\ c \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 3 (8 points)

Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -6 & -5 & 8 \\ -6 & -4 & 7 \end{pmatrix}$.

1. Calculer **sous forme factorisée** les polynômes caractéristiques de A et de B. Vérifier que les valeurs propres de A sont 1 et 2, puis que celles de B sont 0 et -1.

$$\begin{aligned}
P_A[X] = \begin{vmatrix} -1-X & -1 & -2 \\ 2 & 2-X & 2 \\ 2 & 1 & 3-X \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1-X & -1 & -2 \\ 0 & 2-X & 2 \\ -1+X & 1 & 3-X \end{vmatrix} \quad (C_1 \leftarrow C_1 - C_3) \\
&= \begin{vmatrix} 1-X & -1 & -2 \\ 0 & 2-X & 2 \\ 0 & 0 & 1-X \end{vmatrix} \quad (L_3 \leftarrow L_3 + L_1) \\
&= (1-X)^2(2-X)
\end{aligned}$$

De plus,

$$P_B[X] = \begin{vmatrix} -4-X & -2 & 4 \\ -6 & -5-X & 8 \\ -6 & -4 & 7-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4-X & -2 & 4 \\ -6 & -5-X & 8 \\ 0 & 1+X & -1-X \end{vmatrix} \quad (L_3 \leftarrow L_3 - L_2)$$

$$= \begin{vmatrix} -4-X & 2 & 4 \\ -6 & 3-X & 8 \\ 0 & 0 & -1-X \end{vmatrix} \quad (C_2 \leftarrow C_2 + C_3)$$

$$= (-1-X)\begin{vmatrix} -4-X & 2 \\ -6 & 3-X \end{vmatrix}$$

Donc $P_B(X) = (-1-X)\big[(-4-X)(3-X)+12\big] = -(1+X)\big[X^2+X\big] = -X(X+1)^2$.

2. Les matrices A et B sont-elles diagonalisables dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$? Si oui, donner P et D.
Vous prendrez soin de votre rédaction.

<u>Pour la matrice A :</u> P_A est scindé, $\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2\}$ avec $m(1) = 2$ et $m(2) = 1$. Donc A est diagonalisable si et seulement si $\dim(E_1) = 2$.

$$\begin{aligned} E_1 &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \left| \begin{array}{rcl} -2x-y-2z &=& 0 \\ 2x+y+2z &=& 0 \\ 2x+y+2z &=& 0 \end{array} \right. \right\} \\ &= \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ y = -2x-2z\big\} \\ &= \big\{(x,-2x-2z,z),\ (x,z) \in \mathbb{R}^2\big\} \\ &= \big\{x(1,-2,0)+z(0,-2,1),\ (x,z) \in \mathbb{R}^2\big\} = \mathrm{Vect}\big((1,-2,0),(0,-2,1)\big) \end{aligned}$$

Donc $\dim(E_1) = 2$ et A est diagonalisable.

$$\begin{aligned} E_2 &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \left| \begin{array}{rcl} -3x-y-2z &=& 0 \\ 2x+2z &=& 0 \\ 2x+y+z &=& 0 \end{array} \right. \right\} \\ &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \left| \begin{array}{rcll} -3x-y-2z &=& 0 & \\ 2x+2z &=& 0 & \\ -x-z &=& 0 & (\mathrm{Eq}_3 \leftarrow \mathrm{Eq}_3 + \mathrm{Eq}_1) \end{array} \right. \right\} \\ &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \left| \begin{array}{rcl} z &=& -x \\ y &=& -3x-2z = -x \end{array} \right. \right\} \\ &= \big\{x(1,-1,-1),\ x \in \mathbb{R}\big\} = \mathrm{Vect}\big((1,-1,-1)\big) \end{aligned}$$

Finalement, $\quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad$ et $\quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

<u>Pour la matrice B :</u> P_B est scindé, $\mathrm{Sp}(A) = \{0, -1\}$ avec $m(-1) = 2$ et $m(0) = 1$. Donc B est diagonalisable si et seulement si $\dim(E_{-1}) = 2$.

$$\begin{aligned} E_{-1} &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \left| \begin{array}{rcl} -3x-2y+4z &=& 0 \\ -6x-4y+8z &=& 0 \\ -6x-4y+8z &=& 0 \end{array} \right. \right\} \\ &= \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ y = -\tfrac{3}{2}x+2z\big\} \\ &= \big\{(x,-\tfrac{3}{2}x+2z,z),\ (x,z) \in \mathbb{R}^2\big\} \\ &= \big\{x(1,-3/2,0)+z(0,2,1),\ (x,z) \in \mathbb{R}^2\big\} = \mathrm{Vect}\big((1,-3/2,0),(0,2,1)\big) \end{aligned}$$

Donc $\dim(E_{-1}) = 2$ et B est diagonalisable.

$$\begin{aligned}
E_0 &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \left| \begin{array}{rcl} -4x - 2y + 4z &=& 0 \\ -6x - 5y + 8z &=& 0 \\ -6x - 4y + 7z &=& 0 \end{array} \right. \right\} \\
&= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \left| \begin{array}{rcll} y - z &=& 0 & (\mathrm{Eq}_1 \leftarrow \frac{3}{2}\mathrm{Eq}_1 - \mathrm{Eq}_3) \\ y - z &=& 0 & (\mathrm{Eq}_2 \leftarrow \mathrm{Eq}_3 - \mathrm{Eq}_2) \\ -6x - 4y + 7z &=& 0 & \end{array} \right. \right\} \\
&= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \left| \begin{array}{rcl} y &=& z \\ 6x &=& 3z \end{array} \right. \right\} \\
&= \big\{ x(1,2,2),\ x \in \mathbb{R} \big\} = \mathrm{Vect}\big((1,2,2)\big)
\end{aligned}$$

Finalement, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3/2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 4 : une démonstration de cours (6.5 points)

Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie, F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimensions n et p non nulles.

Donnons-nous $\mathcal{B}_1 = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de F et $\mathcal{B}_2 = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$ une base de G.

On suppose que la famille $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$ obtenue par concaténation de $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ est une base de E.

1. Que peut-on dire de F et G dans ce cas ?

   Ils sont supplémentaires dans E : $E = F \oplus G$.

2. Démontrer cette propriété.

   On suppose donc que $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n, \varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p)$ est une base de E. Montrons que $E = F \oplus G$.

   (a) $F \cap G = \{0_E\}$.

   Il est d'abord évident que $\{0_E\} \subset F \cap G$. En effet, F et G étant des sev de E, ils contiennent tous les deux 0_E.

   Montrons que $F \cap G \subset \{0_E\}$: soit $u \in F \cap G$. On a alors

   $$\left. \begin{array}{c} u \in F \\ F = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_1) \end{array} \right\} \Longrightarrow \exists (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n, u = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n$$

   De même,

   $$\left. \begin{array}{c} u \in G \\ G = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_2) \end{array} \right\} \Longrightarrow \exists (b_1, \cdots, b_p) \in \mathbb{R}^p, u = b_1 \varepsilon_1 + \cdots + b_p \varepsilon_p$$

   En soustrayant ces deux expressions de u, on obtient

   $$0_E = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n - b_1 \varepsilon_1 - \cdots - b_p \varepsilon_p$$

   La famille $\mathcal{B}$ étant libre, on en déduit que $(a_1, \cdots, a_n, -b_1, \cdots, -b_p) = (0, \cdots, 0)$.

   Donc $\quad u = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n = 0_E$.

   (b) $E = F + G$.

   Il est d'abord évident que $F + G \subset E$: F et G étant deux sev de E, $F + G$ est aussi un sev de E.

   Montrons maintenant que $E \subset F + G$. Soit $u \in E$, montrons que $u \in F + G$.

   La famille $\mathcal{B}$ étant une base de E, elle est génératrice. Ainsi, il existe $(a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_p) \in \mathbb{R}^{n+p}$ tel que

   $$u = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n + b_1 \varepsilon_1 + \cdots + b_p \varepsilon_p$$

   Mais alors

   $$\left\{ \begin{array}{lcl} (e_1, \cdots, e_n) \in F^n & \Longrightarrow & a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n \in F \\ (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_p) \in G^p & \Longrightarrow & b_1 \varepsilon_1 + \cdots + b_p \varepsilon_p \in G \end{array} \right.$$

   Finalement,

   $$u = \underbrace{a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n}_{\in F} + \underbrace{b_1 \varepsilon_1 + \cdots + b_p \varepsilon_p}_{\in G} \Longrightarrow u \in F + G$$

Exercice 5 : construction d'une symétrie (8 points)

On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}$. On considère les sous-espaces vectoriels

$$F = \{(x, y, z) \in E,\, x - y + 2z = 0\} \qquad \text{et} \qquad G = \left\{(x, y, z) \in E,\, \left| \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 0 \\ x - y + z & = & 0 \end{array} \right. \right\}$$

1. Trouver une base de F et une base de G.

$$\begin{aligned} F &= \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\, y = x + 2z\big\} \\ &= \big\{(x, x + 2z, z),\, (x, z) \in \mathbb{R}^2\big\} \\ &= \big\{x(1, 1, 0) + z(0, 2, 1),\, (x, z) \in \mathbb{R}^2\big\} = \mathrm{Vect}\big((1, 1, 0), (0, 2, 1)\big) \end{aligned}$$

La famille $\big((1, 1, 0), (0, 2, 1)\big)$ étant libre, c'est une base de F.

$$\begin{aligned} G &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\, \left| \begin{array}{rcl} x + y + z & = & 0 \\ x - y + z & = & 0 \end{array} \right. \right\} \\ &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\, \left| \begin{array}{rcll} x + y + z & = & 0 & \\ 2y & = & 0 & (\mathrm{Eq}_2 \leftarrow \mathrm{Eq}_1 - \mathrm{Eq}_2) \end{array} \right. \right\} \\ &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\, \left| \begin{array}{rcl} z & = & -x \\ y & = & 0 \end{array} \right. \right\} \\ &= \big\{x(1, 0, -1),\, x \in \mathbb{R}\big\} = \mathrm{Vect}\big((1, 0, -1)\big) \end{aligned}$$

La famille $\big((1, 0, -1)\big)$ étant libre, c'est une base de G.

2. Montrer que $E = F \oplus G$.

Il suffit de montrer que la famille $\mathcal{F} = \big(\varepsilon_1{=}(1, 1, 0), \varepsilon_2{=}(0, 2, 1), \varepsilon_3{=}(1, 0, -1)\big)$ (obtenue par concaténation des bases de F et de G) est une base de E.

<u>$\mathcal{F}$ est libre :</u> pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$,

$$a\varepsilon_1 + b\varepsilon_2 + c\varepsilon_3 = 0_E \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} a + c & = & 0 \\ a + 2b & = & 0 \\ b - c & = & 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} a + c & = & 0 & \\ 2b - c & = & 0 & (\mathrm{Eq}_2 - \mathrm{Eq}_1) \\ b - c & = & 0 & \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} a + c & = & 0 & \\ 2b - c & = & 0 & \\ -b & = & 0 & (\mathrm{Eq}_3 - \mathrm{Eq}_2) \end{array} \right. \Longrightarrow a = b = c = 0$$

<u>$\mathcal{F}$ est génératrice :</u>

$$\left. \begin{array}{c} \mathcal{F} \text{ est libre} \\ \mathrm{Card}(\mathcal{F}) = \dim(E) \end{array} \right\} \Longrightarrow \mathrm{Vect}\, \mathcal{F} = E$$

Donc $E = F \oplus G$.

3. D'après la question précédente, on sait que pour tout $u \in E$, il existe un unique $(v, w) \in F \times G$ tel que $u = v + w$.

Considérons l'endomorphisme $s : u \longmapsto v - w$.

(a) Supposons que $u \in F$. Que vaut $s(u)$?

Si $u \in F$, alors $u = \underbrace{u}_{\in F} + \underbrace{0_E}_{\in G} \Longrightarrow v = u$ et $w = 0_E$.

D'où : $s(u) = v - w = u - 0_E = u$.

(b) Supposons que $u \in G$. Que vaut $s(u)$?

Si $u \in G$, alors $u = \underbrace{0_E}_{\in F} + \underbrace{u}_{\in G} \Longrightarrow v = 0_E$ et $w = u$.

D'où : $s(u) = v - w = 0_E - u = -u$.

(c) Soit $\mathcal{B}'$ la base de E obtenue par concaténation des bases de F et de G trouvées à la question 1. Déterminer la matrice de s dans cette base $\mathcal{B}'$ au départ et à l'arrivée. Notons A' cette matrice.

La base $\mathcal{B}'$ est la famille $\mathcal{F} = \big(\varepsilon_1{=}(1,1,0), \varepsilon_2{=}(0,2,1), \varepsilon_3{=}(1,0,-1)\big)$ définie à la question précédente. On a alors :

$$\varepsilon_1 \in F \Longrightarrow s(\varepsilon_1) = \varepsilon_1, \qquad \varepsilon_2 \in F \Longrightarrow s(\varepsilon_2) = \varepsilon_2 \qquad \text{et} \qquad \varepsilon_3 \in G \Longrightarrow s(\varepsilon_3) = -\varepsilon_3$$

D'où $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

(d) Soit A la matrice de s dans la base canonique au départ et à l'arrivée. Donner la relation matricielle qui permet de calculer A. **On ne demande pas de faire le calcul.**

Considérons la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$: $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

On a alors $A' = P^{-1}AP$, donc $A = PA'P^{-1}$.

Exercice 6 : Probabilités (5 points)

Soit $p \in]0,1[$. On considère une variable aléatoire X qui suit une loi géométrique de paramètre p.

1. Rappeler la loi de X.

$$X(\Omega) = \mathbb{N}^* \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X{=}n) = p(1-p)^{n-1} = pq^{n-1} \text{ (en posant } q = 1-p)$$

2. Soit $(k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

(a) Montrer que $P(X{>}n) = q^n$ où $q = 1-p$.

Indication : on pourra démarrer en écrivant $P(X{>}n) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} P(X{=}k)$, ou encore $P(X{>}n) = 1 - \displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(X{=}k)$.

$$P(X{>}n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(X{=}k) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} pq^{k-1} = pq^n \sum_{m=0}^{+\infty} q^m \quad \text{en posant } m = k-1-n$$

Donc

$$P(X{>}n) = pq^n \times \frac{1}{1-q} = q^n \qquad \text{car} \qquad 1-q = p$$

(b) Expliquer pourquoi $P(X{=}n{+}k \ \cap \ X{>}n) = P(X{=}n{+}k)$.

Si l'évènement "$X{=}n{+}k$" est réalisé, alors l'évènement "$X{>}n$" l'est aussi. Autrement dit, en définissant :

$$A = \{\omega \in \Omega, X(\omega) = n+k\} \qquad \text{et} \qquad B = \{\omega \in \Omega, X(\omega) > n\}$$

on a : $A \subset B \Longrightarrow A \cap B = A \Longrightarrow P(A \cap B) = P(A)$.

(c) Calculer la probabilité conditionnelle $P(X{=}n{+}k \mid X{>}n)$. Comparer votre résultat à la valeur $P(X{=}k)$.

Par définition d'une probabilité conditionnelle, on a $P(X{=}n{+}k \mid X{>}n) = \dfrac{P(X{=}n{+}k \ \cap \ X{>}n)}{P(X{>}n)}$

Donc, compte tenu des questions 2.a et 2.b.,

$$P(X{=}n{+}k \mid X{>}n) = \frac{P(X{=}n{+}k)}{q^n} = \frac{pq^{n+k-1}}{q^n} = pq^{k-1}$$

On trouve donc que $P(X{=}n{+}k \mid X{>}n) = P(X{=}k)$.

(d) Expliquer pourquoi on dit que la loi de X est «sans mémoire».

Plaçons-nous dans l'exemple du hammeçonneur qui envoie des emails pour obtenir des numéros de cartes Visa et où X est le nombre de messages envoyés avant d'obtenir une première réponse.

Si, au bout de n messages envoyés, il n'a toujours pas reçu de réponses, on sait alors que $X{>}n$. La probabilité qu'il reçoive une réponse au $k^{\text{ème}}$ message suivant est alors $P(X{=}n{+}k \mid X{>}n)$.

Or cette probabilité est la même que $P(X{=}k)$. Autrement dit, le fait de ne pas avoir eu de réponses aux n premiers envois laisse le hammeçonneur dans la même situation que celle qu'il avait au départ.

3. On considère une variable aléatoire Y telle que

$$Y(\Omega) = \mathbb{N}^* \qquad \text{et} \qquad \forall (k,n) \in (\mathbb{N}^*)^2,\ P(Y{=}n{+}k \mid Y{>}n) = P(Y{=}k)$$

Soit (p_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $\quad p_n = P(Y{=}n)$.

(a) Écrire $P(Y{>}1)$ en fonction de p_1.

Comme $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$, le complémentaire de "$Y{>}1$" est "$Y{=}1$". Ainsi, $P(Y{>}1) = 1 - P(Y{=}1) = 1 - p_1$.

(b) En considérant les évènements «$Y{>}1$», «$Y{=}1$» et «$Y{=}2$», exprimer $\dfrac{p_2}{p_1}$ en fonction de p_1.

En écrivant l'hypothèse dans la cas où $k = n = 1$, on obtient :

$$\frac{P(Y{=}1{+}1 \cap Y{>}1)}{P(Y{>}1)} = P(Y{=}1) \Longrightarrow \frac{p_2}{1-p_1} = p_1 \Longrightarrow \frac{p_2}{p_1} = 1 - p_1$$

(c) De même, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en considérant les évènements «$Y{>}1$», «$Y{=}n$» et «$Y{=}n+1$», trouver une expression simple de $\dfrac{p_{n+1}}{p_n}$.

D'après l'hypothèse, on a :

$$\frac{P(Y{=}1{+}n \cap Y{>}1)}{P(Y{>}1)} = P(Y{=}n) \Longrightarrow \frac{p_{n+1}}{1-p_1} = p_n \Longrightarrow \frac{p_{n+1}}{p_n} = 1 - p_1$$

(d) En déduire p_n en fonction de n. Comment appelle-t-on la loi de Y ?

La suite (p_n) est donc une suite géométrique de raison $1 - p_1$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$p_n = p_1(1-p_1)^{n-1}$$

La variable aléatoire Y suit donc une loi géométrique de paramètre p_1.

Les seules lois «sans mémoire» de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ sont les lois géométriques.