EPITA

Mathématiques

Partiel (S3)

décembre 2018

Nom :

Prénom :

Entourer le nom de votre professeur de TD : Mme BOUDIN / M. GORON / M. RODOT

Classe :

NOTE :

Exercice 1 (5 points)

Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

A et B sont-elles diagonalisables dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$? Si oui, déterminer D et P.

N.B. : l'obtention des sous-espaces propres sous forme de sous-espaces engendrés doit découler d'un raisonnement clair et non pas d'une manière hasardeuse en prenant directement des valeurs particulières.

[suite du cadre page suivante]

Exercice 2 (3 points)

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 3-a & -5+a & a \\ -a & a-2 & a \\ 5 & -5 & -2 \end{pmatrix}$.

Discuter de la diagonalisabilité de A dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ suivant les valeurs de a.

N.B. : la diagonalisation dans les cas favorables n'est pas demandée.

[suite du cadre page suivante]

Exercice 3 (4 points)

1. Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (u, v, w) & \longmapsto & (2u - w; 3u + v + 2w) \end{array} \right.$.

   Déterminer la matrice de f relativement aux bases canoniques des espaces de départ et d'arrivée.

2. Soient $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P(X) & \longmapsto & 2P(X+1) + P(X-1) - 2P(X) \end{array} \right.$.

   Déterminer la matrice de f relativement à la base canonique $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 4 (4 points)

Soient E, F deux $\mathbb{R}$-ev, $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $X = (x_1, \dots, x_n)$ est une famille de vecteurs de E. Montrer que

1. $f\big(\mathrm{Vect}(X)\big) = \mathrm{Vect}\big(f(X)\big)$.

2. $\big[f$ surjective et $\mathrm{Vect}(X) = E\big] \Longrightarrow \mathrm{Vect}\big(f(X)\big) = F$.

3. $\big[f$ injective et X libre$\big] \Longrightarrow f(X)$ libre.

Exercice 5 (3 points)

1. Montrer que tout polynôme de degré impair à coefficients réels admet au moins une racine réelle.

2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + A + I = 0 \quad (*)$.

   a. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$. Montrer que $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$.

   b. Montrer qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ ne peut pas vérifier l'équation $(*)$.

Exercice 6 (2 points)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. Calculer le déterminant d'ordre $n+1$: $\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ b_1 & a_1 & a_1 & \dots & \dots & a_1 \\ b_1 & b_2 & a_2 & \dots & \dots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_1 & b_2 & \dots & \dots & b_n & a_n \end{vmatrix}$.