Corrigé du partiel 1

Exercice 1 (5 points)

1. Notons $(u_n) = \left(\dfrac{(n!)^2}{(3n)!}\right)$.

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\big((n+1)!\big)^2}{\big(3n+3\big)!} \times \frac{(3n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(3n+1)(3n+2)(3n+3)} = \frac{n+1}{3(3n+1)(3n+2)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 < 1.$$

Donc $\sum u_n$ converge via la règle de d'Alembert.

2. Notons $(v_n) = \left(\dfrac{(n!)^2}{(kn)!}\right)$.

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\big((n+1)!\big)^2}{\big(k(n+1)\big)!} \times \frac{(kn)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(kn+1)(kn+2)\dots(kn+k)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{k^k}\, n^{2-k}.$$

Si $k = 2$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{4} < 1$ donc $\sum v_n$ converge via la règle de d'Alembert.

Si $k > 2$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 < 1$ donc $\sum v_n$ converge via la règle de d'Alembert.

Si $k < 2$, $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $\sum v_n$ diverge via la règle de d'Alembert.

3. Notons $(w_n) = \left(\left(\dfrac{n}{n+a}\right)^{n^2}\right)$.

$$\sqrt[n]{w_n} = \left(\tfrac{n}{n+a}\right)^n = e^{-n\ln(1+a/n)} = e^{-n(a/n+o(1/n))} = e^{-a+o(1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-a}.$$

Si $e^{-a} < 1$ i.e. $a > 0$, $\sum w_n$ converge via la règle de Cauchy.

Si $e^{-a} > 1$ i.e. $a < 0$, $\sum w_n$ diverge via la règle de Cauchy.

Si $e^{-a} = 1$ i.e. $a = 0$, $(w_n) = (1)$ qui ne tend pas vers 0 donc $\sum w_n$ diverge.

Exercice 2 (4 points)

Via les transformations $C_1 \longleftarrow C_1+C_2+C_3$ puis $L_2 \longleftarrow L_2-L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3-L_1$, on a $P_A(X) = (3-X)(X+1)(X+3)$.
Donc P_A est scindé dans $\mathbb{R}$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{3, -1, -3\}$ avec $m(3) = m(-1) = m(-3) = 1$ donc A est diagonalisable.

$$\begin{aligned} E_3 &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \left| \begin{array}{l} -3x+3y=0 \\ x-5y+4z=0 \\ x+y-2z=0 \end{array} \right. \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{-1} &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \left| \begin{array}{l} x+3y=0 \\ x-y+4z=0 \\ x+y+2z=0 \end{array} \right. \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{-3} &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \left| \begin{array}{l} 3x+3y=0 \\ x+y+4z=0 \end{array} \right. \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

D'où $D = P^{-1}AP$ avec $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Via les transformations $C_1 \longleftarrow C_1 - C_2$ puis $L_2 \longleftarrow L_2 + L_1$, on a $P_B(X) = (1-X)(X+1)^2$.

Donc P_B est scindé dans $\mathbb{R}$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(B) = \{1, -1\}$ avec $m(-1) = 2$ et $m(1) = 1$.

$m(1) = 1$ donc $\dim(E_1) = 1$.

$$\begin{aligned} E_{-1} &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \left| \begin{array}{l} x-y=0 \\ x+3y-4z=0 \\ x+y-2z=0 \end{array} \right. \right\} \\ &= \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

$\dim(E_{-1}) = 1 \neq 2 = m(-1)$ donc B n'est pas diagonalisable.

Exercice 3 (4 points)

Via la transformation $C_1 \longleftarrow C_1 + C_2 + C_3$ puis $L_2 \longleftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \longleftarrow L_3 - L_1$, on a $P_A(X) = -(X+1)(X+2)^2$.

Donc P_A est scindé dans $\mathbb{R}$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{-1, -2\}$ avec $m(-2) = 2$ et $m(-1) = 1$.

A est diagonalisable ssi E_{-2} est de dimension 2.

$$\begin{aligned} E_{-2} &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \left| \begin{array}{l} -x+y=0 \\ (a-3)x+2y+(1-a)z=0 \end{array} \right. \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \left| \begin{array}{l} x=y \\ (a-1)x=(a-1)z \end{array} \right. \right\} \end{aligned}$$

Si $a = 1$, $E_{-2} = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ et A est diagonalisable.

Si $a \neq 1$, $E_{-2} = \mathrm{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ et A n'est pas diagonalisable

Exercice 4 (4 points)

1. a. $f(1) = 3X$; $f(X) = 2X^2 + 1$; $f(X^2) = X^3 + 2X$ et $f(X^3) = 3X^2$ donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b. Le déterminant de cette matrice est égal à 9 donc elle est inversible. Ainsi f est bijective.

2. $f(E_{11}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{pmatrix} = -bE_{12} + cE_{21}$.

   $f(E_{12}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c & a-d \\ 0 & c \end{pmatrix} = -cE_{11} + (a-d)E_{12} + cE_{22}$.

   $f(E_{21}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 0 \\ d-a & -b \end{pmatrix} = bE_{11} + (d-a)E_{21} - bE_{22}$.

   $f(E_{22}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -c & 0 \end{pmatrix} = bE_{12} - cE_{21}$.

   Donc
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -c & b & 0 \\ -b & a-d & 0 & b \\ c & 0 & d-a & -c \\ 0 & c & -b & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 (4 points)

On a immédiatement $P_A(X) = (1-X)(2-X)^3$.

Donc P_A est scindé dans $\mathbb{R}$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{1, 2\}$ avec $m(2) = 3$ et $m(1) = 1$.

A est diagonalisable ssi E_2 est de dimension 3.

$$E_{-2} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \left| \begin{array}{r} -x+ay+bz+ct=0 \\ dz+et=0 \\ ft=0 \end{array} \right. \right\}$$

- Si $f \neq 0$, $t = 0$ donc $dz = 0$.
  - Si $d \neq 0$, $z = 0$ donc $x = ay$ soit $E_2 = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ d'où A non diagonalisable.
  - Si $d = 0$, $x = ay + bz$ donc $E_2 = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ d'où A non diagonalisable.
- Si $f = 0$, $dz + et = 0$
  - Si $e = 0$, $dz = 0$
    - Si $d = 0$, $x = ay + bz + ct$ donc $E_2 = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ d'où A diagonalisable.
    - Si $d \neq 0$, $z = 0$ donc $x = ay + ct$ et $E_2 = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ d'où A non diagonalisable.
  - Si $e \neq 0$, $t = -\dfrac{d}{e}z$ et $x = ay + \left(b + \dfrac{cd}{e}\right)z$ donc $E_2 = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b - cd/e \\ 0 \\ 1 \\ -d/e \end{pmatrix}\right\}$ d'où A non diagonalisable.

Conclusion : A est diagonalisable ssi $d = e = f = 0$.