Partiel 1

Durée : trois heures
Documents et calculatrices non autorisés

Nom : **Prénom :** **Classe :**

Consignes :

– aucune autre feuille, que celles agrafées fournies pour répondre, ne sera corrigée.

– aucune réponse au crayon de papier ne sera corrigée.

Exercice 1 (4 points)

1. Déterminer, via la règle de d'Alembert, la nature de la série $\sum u_n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{10^n}{n\,4^{2n+1}}$.

2. Déterminer, via la règle de Cauchy, la nature de la série $\sum v_n$ où pour tout entier $n \geqslant 2$, $v_n = \dfrac{n}{\big(\ln(n)\big)^n}$.

Exercice 2 (4 points)

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 7 & -5 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \end{pmatrix}$.

A et B sont-elles diagonalisables dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$? Si oui, déterminer D et P.

N.B. : l'obtention des sous-espaces propres sous forme de sous-espaces engendrés doit découler d'un raisonnement clair et non pas d'une manière hasardeuse en prenant directement des valeurs particulières.

[suite du cadre page suivante]

Exercice 3 (3,5 points)

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-a & a-2 & a \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A en choisissant dans P_A comme première transformation $C_1 \longleftarrow C_1 + C_2$.

2. Discuter de la diagonalisabilité de A dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ suivant les valeurs de a.
N.B. : la diagonalisation dans les cas favorables n'est pas demandée.

[suite du cadre page suivante]

Exercice 4 (3,5 points)

Soit le système d'équations différentielles suivant : $\begin{cases} x'(t) = x(t) + 8y(t) \\ y'(t) = x(t) + 3y(t) \end{cases}$.

On note $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $X'(t) = AX(t)$.

2. Diagonaliser A en explicitant D et P. On écrira $D = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $\boxed{\text{avec } a < b}$, où a et b sont à déterminer.

3. [*Vérifier que vous avez bien pris $a < b$ dans la matrice D obtenue dans la question précédente*]. En déduire $x(t)$ et $y(t)$ en fonction de t.

[suite du cadre page suivante]

Exercice 5 (4 points)

1. Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $f : \begin{cases} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto AM \end{cases}$. Déterminer la matrice de f relativement à la base canonique

   $\mathscr{B} = \left(E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Soit $\Delta : \begin{cases} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto (a+d)X^2 + (b+c)X + d - c \end{cases}$

   Déterminer la matrice de Δ relativement aux bases canoniques de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 6 (2 points)

Soit $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$. Calculer le déterminant suivant (sous forme factorisée) en précisant les transformations effectuées

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_2 & \cdots & \cdots & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & \cdots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$