Contrôle de cours 1 (1 heure)

Nom : ..... **Prénom :** ..... **Classe :** .....

Ce contrôle contient deux épreuves : une première sur l'ECUE ASN et une seconde sur l'ECUE PSE. Il y aura donc une note par épreuve. À vous de gérer votre temps, mais le sujet est calibré pour 45 minutes sur ASN et 15 minutes sur PSE.
N.B. : le barème de chaque épreuve est sur 20.

Épreuve 1 : Analyse, Séries Numériques NOTE ASN : / 20

Exercice 1 : comparaison de suites (6 points)

1. Soient deux suites (u_n) et (v_n) telles que, au voisinage de $+\infty$, $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$ et $v_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
   (a) Donner des équivalents simples en $+\infty$ de u_n, de v_n et de $u_n - v_n + 1$. Justifier brièvement.

   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....

   (b) Trouver le développement limité de $(u_n + v_n)$ à l'ordre maximal permis par les données de l'exercice.

   .....
   .....
   .....

   (c) Trouver le développement limité de $(u_n \times v_n)$ à l'ordre maximal permis par les données de l'exercice.

   .....
   .....
   .....
   .....
   .....
   .....

2. Soient deux suites (u_n) et (v_n) ne s'annulant pas, telles qu'au voisinage de $+\infty$, $u_n \sim v_n$.
   Dire si les relations suivantes sont vraies ou non. Justifier brièvement (en cas de réponse positive, rédiger une courte démonstration ; en cas de réponse négative, donner un contre-exemple).
   (a) $(u_n - 1) \sim (v_n - 1)$

   .....
   .....

   (b) $u_n^2 \sim v_n^2$

   .....
   .....

Exercice 2 : méthodes de comparaison (6 points)

1. Considérons deux suites (u_n) et (v_n) positives telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq v_n$. Quels liens d'implications existent-ils entre les propriétés « $\sum u_n$ converge », « $\sum u_n$ diverge », « $\sum v_n$ converge » et « $\sum v_n$ diverge » ?

2. Considérons deux suites (u_n) et (v_n) positives telles que, au voisinage de $+\infty$, $u_n \sim v_n$. Quels liens d'implications existent-ils entre les propriétés « $\sum u_n$ converge », « $\sum u_n$ diverge », « $\sum v_n$ converge » et « $\sum v_n$ diverge » ?

3. Application 1 : déterminer la nature de $\sum \dfrac{1}{n^2 \ln(n)}$.

4. Application 2 : déterminer la nature de $\sum \left(\dfrac{1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\sin\left(\frac{1}{n}\right)} \right)$.

Exercice 3 : règle de d'Alembert (3 points)

1. Énoncer la règle de d'Alembert pour les séries numériques.

2. Donner un exemple d'une suite (u_n) strictement positive vérifiant à la fois

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 \quad \text{et} \quad \sum u_n \text{ diverge.}$$

Exercice 4 : une démonstration (5 points)

Considérons une suite (u_n) telle que $\sum |u_n|$ converge.

1. Que peut-on dire de la nature de $\sum u_n$?

2. Démontrer cette propriété.

3. Étudier la nature de $\sum \dfrac{\sin(n)}{n^2}$.

Épreuve 2 : Probabilités et Séries Entières NOTE PSE : / 20

Exercice 1 (10 points)

Considérons une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans $\{0, 1, 2\}$, telle que

$$P(X = 0) = \frac{1}{6}, \quad P(X = 1) = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad P(X = 2) = \frac{1}{2}.$$

1. Exprimer sa fonction génératrice $G_X(t)$.

2. Expliquer (sans faire les calculs finaux) comment cette fonction permet d'obtenir :
   (a) L'espérance de X.
   (b) La variance de X.

Exercice 2 (10 points)

Considérons deux variables aléatoires X et Y indépendantes, admettant les fonctions génératrices :

$$G_X(t) = G_Y(t) = \frac{1 + 3t}{4}.$$

1. Donner les lois de X et Y.

2. Exprimer la fonction génératrice de $Z = X + Y$ à l'aide de $G_X(t)$ et $G_Y(t)$.

3. En déduire la loi de Z.