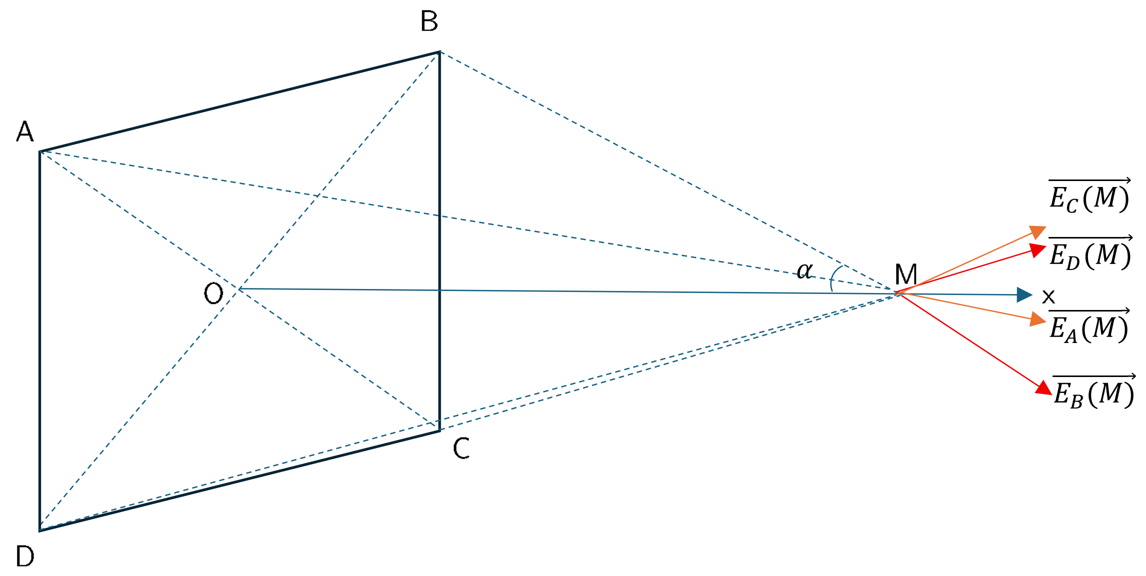
Travaux dirigés 3 : Electromagnétisme

Correction

1. Le champ électrostatique est nul au point O.
2. Voir figure



(NB : les flèches rouges pointent vers l'avant du plan, les flèches oranges vers l'arrière)

3. On remarque d'après la figure ci-dessus que les différentes contributions des champs vont s'additionner sur l'axe x mais au contraire, s'annuler sur les autres axes.
4. Commençons par appliquer la formule afin de calculer le champ $\overrightarrow{E_A(M)}$:

$$\overrightarrow{E_A(M)} = \frac{kq}{d^2}\overrightarrow{u_{AM}} \quad (1)$$

Avec : $\overrightarrow{u_{AM}} = \frac{\overrightarrow{AM}}{\|\overrightarrow{AM}\|}$, un vecteur unitaire allant de A vers M.

Il faut maintenant exprimer d en fonction du problème. On sait que le plan du carré est orthogonal à l'axe des x. On peut donc appliquer le théorème de Pythagore dans le triangle AOM. La longueur AO vaut, d'après le théorème de Pythagore qu'on pourrait appliquer entre A, O et le milieu de [AB] :

$$AO = \sqrt{\frac{L}{2}}$$

On obtient donc, en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle AOM

$$d = \sqrt{x^2 + \frac{L^2}{2}}$$

Ce qui nous amène, en remplaçant dans (1) :

$$\overrightarrow{E_A(M)} = \frac{kq}{x^2 + \frac{L^2}{2}} \overrightarrow{u_{AM}}$$

Or, nous avons dit à la question précédente que seule la composante sur l'axe x nous intéresse, nous devons donc projeter. On obtient, en utilisant l'angle alterne interne

$$\overrightarrow{E_{A,x}(M)} = \frac{kq}{x^2 + \frac{L^2}{2}} . \cos(\alpha) . \overrightarrow{u_x} \quad (2)$$

Or, en travaillant dans le triangle AOM, on trouve que :

$$\cos(\alpha) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{L^2}{2}}}$$

En remplaçant dans (2) :

$$\overrightarrow{E_{A,x}(M)} = \frac{kq}{x^2 + \frac{L^2}{2}} . \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{L^2}{2}}} . \overrightarrow{u_x} = \frac{kqx}{\left(x^2 + \frac{L^2}{2}\right)^{3/2}} \overrightarrow{u_x}$$

De plus, nous venons de montrer à la question 2 que chacune des charges est responsable de la même contribution sur l'axe x (même distance, même angle alpha). On trouve donc le résultat demandé en additionnant chaque champ (théorème de superposition) :

$$\overrightarrow{E_{TOT}(M)} = \frac{4kqx}{\left(x^2 + \frac{L^2}{2}\right)^{3/2}} \overrightarrow{u_x}$$

5. Il suffit de remplacer :

$$\overrightarrow{E_{TOT}\left(\frac{L}{2}\right)} = \frac{4kq\frac{L}{2}}{\left(\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \frac{L^2}{2}\right)^{3/2}} \overrightarrow{u_x} = \frac{4kq\frac{L}{2}}{\left(\frac{3L^2}{4}\right)^{3/2}} \overrightarrow{u_x} = \frac{16kq}{\sqrt{27}L^2} \overrightarrow{u_x}$$

6. Si $x \gg L$, on obtient :

$$\overrightarrow{E_{TOT}(M)} = \frac{4kqx}{\left(x^2 + \frac{L^2}{2}\right)^{3/2}} \overrightarrow{u_x} \approx \frac{4kqx}{(x^2+0)^{3/2}} \overrightarrow{u_x} \approx \frac{4kq}{x^2} \overrightarrow{u_x}$$

Tout se passe comme s'il y avait une charge 4q à une distance x du point M, ce qui semble logique puisque cela revient à « dézoomer » : les 4 charges deviennent très proches l'unes de l'autre.

7. Pour tracer le graph on s'aide des questions précédentes :
   a. On sait que E(0)=0
   b. On sait que E(L/2) est le maximum
   c. On sait que si $x \gg L$ alors on a une décroissante en $1/x^2$