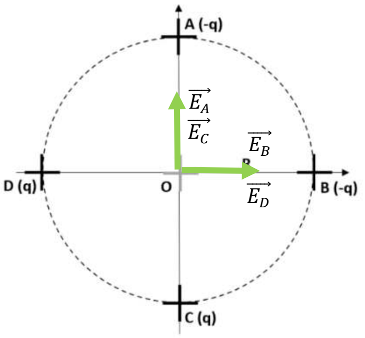
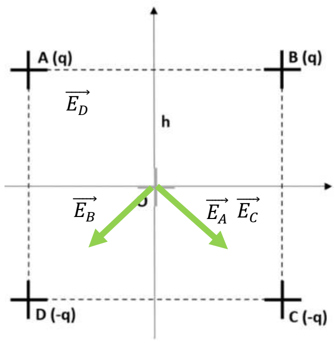
Correction TD 1 : Electromagnétisme

Exercice 1 : Calcul du champ électrostatique créé par une distribution discrète de charges :





1. Voir schéma
2. Voici les expressions des champs électrostatiques :

$$(Pour\ le\ cercle) \qquad \overrightarrow{E_A} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{kq}{r^2} \end{pmatrix} ;\ \overrightarrow{E_B} = \begin{pmatrix} \frac{kq}{r^2} \\ 0 \end{pmatrix} ;\ \overrightarrow{E_C} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{kq}{r^2} \end{pmatrix} ;\ \overrightarrow{E_D} = \begin{pmatrix} \frac{kq}{r^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(Pour\ le\ carré) \quad \overrightarrow{E_A} = \frac{kq}{(h\sqrt{2})^2}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} ;\ \overrightarrow{E_B} = \frac{kq}{(h\sqrt{2})^2}\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} ;\ \overrightarrow{E_C} = \frac{kq}{(h\sqrt{2})^2}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} ;\ \overrightarrow{E_D} = \frac{kq}{(h\sqrt{2})^2}\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Ainsi que les normes :

$$(Pour\ le\ cercle) \qquad \|\overrightarrow{E_A}\| = \|\overrightarrow{E_B}\| = \|\overrightarrow{E_C}\| = \|\overrightarrow{E_D}\| = \frac{kq}{r^2}$$

$$(Pour\ le\ carré)\ \|\overrightarrow{E_A}\| = \frac{kq}{(h\sqrt{2})^2} ;\ \|\overrightarrow{E_B}\| = \frac{kq}{(h\sqrt{2})^2} ;\ \|\overrightarrow{E_C}\| = \frac{kq}{(h\sqrt{2})^2} ;\ \|\overrightarrow{E_D}\| = \frac{kq}{(h\sqrt{2})^2}$$

3. Le champ total vaut :

$$(Pour\ le\ cercle)\ \overrightarrow{E_{total}} = \overrightarrow{E_A} + \overrightarrow{E_B} + \overrightarrow{E_C} + \overrightarrow{E_D} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{kq}{r^2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{kq}{r^2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{kq}{r^2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{kq}{r^2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2kq}{r^2} \\ \frac{2kq}{r^2} \end{pmatrix}$$

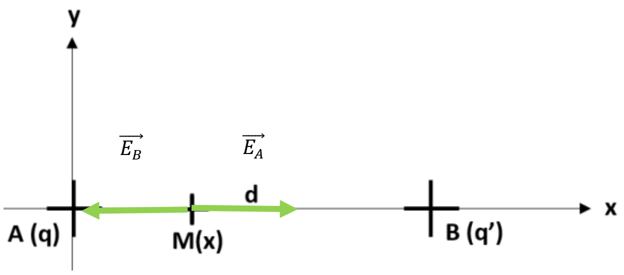
$$(Pour\ le\ carré)\ \overrightarrow{E_{total}} = \overrightarrow{E_A} + \overrightarrow{E_B} + \overrightarrow{E_C} + \overrightarrow{E_D} = \frac{kq}{(h\sqrt{2})^2}\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{kq\sqrt{2}}{h^2} \end{pmatrix}$$

4. La force que subirait une charge Q serait :

$$(Pour\ le\ cercle)\ \vec{F} = Q.\overrightarrow{E_{total}} = Q\begin{pmatrix} \frac{2kq}{r^2} \\ \frac{2kq}{r^2} \end{pmatrix}$$

$$(Pour\ le\ carré)\ \vec{F} = Q\ \overrightarrow{E_{total}} = Q\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{kq\sqrt{2}}{h^2} \end{pmatrix}$$

Exercice 2 :



1. Voir schéma
2.

$$\overrightarrow{E_A} = \frac{kq}{x^2}\ \overrightarrow{u_x}$$

3. Si x>d

$$\overrightarrow{E_B} = \frac{kq'}{(x-d)^2}\overrightarrow{u_x}$$

Si x <d

$$\overrightarrow{E_B} = -\frac{kq'}{(d-x)^2}\overrightarrow{u_x}$$

4. Le champ total est donc :

$$\overrightarrow{E_{Total}} = \left(\frac{kq}{x^2} + \frac{kq'}{(x-d)^2}\right)\overrightarrow{u_x} \qquad si\ x > d$$

$$\overrightarrow{E_{Total}} = \left(\frac{kq}{x^2} - \frac{kq'}{(d-x)^2}\right)\overrightarrow{u_x} \qquad si\ x < d$$

Dans le cas où $x < d$:

$$\overrightarrow{E_{Total}} = 0 \iff \frac{kq}{x^2} = \frac{kq'}{(d-x)^2}$$

$$\iff \left(\frac{d}{x} - 1\right)^2 = \frac{q'}{q}$$

$$\iff \frac{d}{x} - 1 \iff= \sqrt{\left(\frac{q'}{q}\right)}$$

$$\iff x = \frac{d}{1 + \sqrt{\left(\frac{q'}{q}\right)}}$$

Dans le cas où $x > d$:

$$\overrightarrow{E_{Total}} = 0 \iff \frac{kq}{x^2} = \frac{-kq'}{(x-d)^2}$$

$$\iff \left(1 - \frac{d}{x}\right)^2 = -\frac{q'}{q}$$

$$\iff 1 - \frac{d}{x} = \sqrt{-\left(\frac{q'}{q}\right)}$$

$$\iff x = -\frac{d}{\sqrt{-\left(\frac{q'}{q}\right)} - 1}$$

Correction TD2 :

Exercice 1 :

1.

Cercle :

$$V(O) = V_A(O) + V_B(O) + V_C(O) + V_D(O)$$

$$V(O) = -\frac{kq}{r} - \frac{kq}{r} + \frac{kq}{r} + \frac{kq}{r} = 0$$

Carré :

$$V(O) = -\frac{kq}{r} - \frac{kq}{r} + \frac{kq}{r} + \frac{kq}{r} = 0$$

2.

L'énergie potentielle électrostatique vaut QV, soit 0 dans les 2 cas.

Exercice 2 :

Entre 0 et d :

Si q'=-q alors il faut placer M en d/2

Si x>d :

$$V(M) = \frac{kq}{x} + \frac{kq'}{x-d} = 0$$

$$\frac{q}{x} + \frac{q'}{x-d} = 0$$

$$\frac{q}{x} = -\frac{q'}{x-d}$$

$$\frac{q}{q'} = -\frac{x}{x-d}$$

Exercice 3 :

Idée : on va placer les charges une par une, en partant du principe qu'elles sont infiniment loin au départ, dans une zone de l'espace où le potentiel est nul. Ensuite, on calcule le potentiel là où la charge doit aller, ensuite, on calcule l'énergie.

Charge 1 (q) :

- Potentiel au départ : 0
- Potentiel à l'endroit où placer la charge : 0
- Energie neccessaire : 0

Charge 2 (2q) :

- Potentiel au départ : 0
- Potentiel à l'endroit où placer la charge :

$$V(D) = \frac{kq}{a}$$

- Energie neccessaire :

$$\varepsilon(D) = \frac{2kq^2}{a}$$

Charge 3 (3q) :

- Potentiel au départ : 0
- Potentiel à l'endroit où placer la charge :

$$V(C) = \frac{kq}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{2kq}{b}$$

- Energie neccessaire :

$$\varepsilon(C) = 3q\left(\frac{kq}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{2kq}{b}\right)$$

Charge 4 (-2q) :

- Potentiel au départ : 0
- Potentiel à l'endroit où placer la charge :

$$V(B) = \frac{kq}{b} + \frac{2kq}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{3kq}{a}$$

- Energie neccessaire :

$$\varepsilon(B) = -2q\left(\frac{kq}{b} + \frac{2kq}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{3kq}{a}\right)$$

L'énergie totale à dépenser vaut :

$$\varepsilon = \frac{2kq^2}{a} + 3q\left(\frac{kq}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{2kq}{b}\right) + -2q\left(\frac{kq}{b} + \frac{2kq}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{3kq}{a}\right)$$

$$\varepsilon = \frac{2kq^2}{a} - \frac{6kq^2}{a} + \frac{6kq^2}{b} - \frac{2qkq}{b} + \frac{3kq^2}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{4kq}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\varepsilon = -\frac{4kq^2}{a} + \frac{4kq^2}{b} - \frac{kq}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

On peut commenter les énergies positives/négatives en termes d'attraction/répulsion