LES POLYNÔMES

Une semaine

Table des matières

ECUE concerné

Cette feuille de TD est un des trois chapitres de l'ECUE APEF : analyse (polynômes, équations différentielles, fonctions). Elle fait partie du B3.

Les **prérequis** sont :

— ECUE [MATH-S1-1-OBM] du séminaire.
— Développer un produit de polynômes.
— Résoudre une équation du second degré.

Motivation

Ce TD est en partie la suite du TD d'arithmétique vu au semestre 1. Il aborde quelques notions d'arithmétique des polynômes ainsi que la notion de racines et de factorisation d'un polynôme.

Un polynôme à coefficients dans un ensemble $\mathbb{K}$ donné est une expression que l'on obtient en faisant uniquement des additions, des produits d'indéterminées et des multiplications par les coefficients. Formellement, un polynôme à une indéterminée $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_NX^N$ sera représenté [1] par la suite (a_n) de ses coefficients. Cette suite est à support fini, c'est-à-dire qu'elle est nulle à partir d'un certain rang.

Vous avez déjà manipulé dans vos études des polynômes à coefficients réels. Ils représentaient des fonctions réelles d'une variable réelle et ce sera toujours le cas ce semestre. Mais il faut savoir qu'un polynôme peut aussi représenter d'autres objets. Par exemple, le polynôme $P = X^2 - 3X + 2$ peut représenter l'opérateur différentiel $f \longmapsto f'' - 3f' + 2f$. Vous verrez d'ailleurs au chapitre suivant le lien entre les racines de P et les solutions de l'équation différentielle $f'' - 3f' + 2f = 0$.

Quand les coefficients du polynôme sont des réels ou des complexes, on a naturellement des opérations d'addition et de multiplication qui vérifient les mêmes propriétés que sur les entiers, ainsi on va pouvoir prolonger les concepts définis pour les entiers : divisibilité, division euclidienne... Les polynômes irréductibles sont le pendant des facteurs premiers : on ne peut pas les scinder en un produit de deux polynômes de degrés strictement inférieurs. Et tout polynôme se décompose de manière unique comme le produit d'une constante et de polynômes irréductibles unitaires [2].

On ne peut cependant pas réduire les polynômes à un calque des entiers : ce sont des objets plus complexes, ainsi leur utilisation est beaucoup plus large, comprenant d'autres opérations comme la composition et la dérivation. Ce sont néanmoins des objets engendrés par des opérations basiques et qui gardent une relative simplicité d'utilisation, c'est pourquoi ce sont de très bons candidats pour les problèmes d'interpolation (approximation par des objets plus faciles à manipuler) : on pourra penser plus tard aux formules de Taylor, à l'interpolation de Lagrange, au théorème de Weierstrass et aux séries de Fourier via des polynômes trigonométriques [3].

Attendus

À la fin de ce chapitre, vous devez être capables de combiner la factorisation d'un polynôme avec la recherche de ses racines et leurs ordres de multiplicité.

Pour cela, en détails, vous devez être capables de :

— Déterminer le degré d'un polynôme, d'une somme ou d'un produit de polynômes.
— Énoncer le théorème de division euclidienne de deux polynômes.
— Faire une division euclidienne de polynômes.
— Relier la notion de racine d'un polynôme avec la factorisation d'un polynôme.

1. C'est également un représentation possible en machine, via une liste par exemple.
2. Un polynôme est dit unitaire si son coefficient dominant, c'est-à-dire lié au monôme de plus haut degré, est 1. La multiplication par une constante non nulle ne changeant rien à la divisibilité des polynômes, on se restreint à des polynômes unitaires pour conserver un caractère unique et limiter les calculs qui se compensent.
3. Ces procédés permettent même de définir des suites de polynômes convergeant vers ce que l'on veut modéliser, tout en donnant une maîtrise de la vitesse de convergence.

— Relier la notion de racine d'un polynôme avec ses dérivées successives en la racine.
— Déterminer l'ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme.
— Factoriser un polynôme en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ ou $\mathbb{R}[X]$.

1 Polynômes et opérations

1.1 Résumé

Formellement, un polynôme à une indéterminée à coefficients réels ou complexes se représente par la suite stationnaire nulle à partir d'un certain rang de ses coefficients réels ou complexes.

C'est par cette définition qu'on peut définir le degré d'un polynôme (quand cette suite n'est pas nulle), créer des opérations classiques : addition, multiplication interne et externe, composition. Elle nous permet aussi de dériver « naturellement » les polynômes. Les coefficients d'un polynôme sont d'ailleurs reliés à ses dérivées successives en un point par exemple (formule de Taylor).

1.2 Exercices

Exercice 1.1

1. Soient $P(X) = -2X^3 + 3X - 4$, $Q(X) = 3X^2 + 6X - 2$ et $R(X) = 1 + 2X^3$.

   Donner $P(X) + Q(X)$, $P(X) + R(X)$ et $Q(X) + R(X)$. En déduire une formule sur le degré de la somme de 2 polynômes.
2. Donner le degré ainsi que son terme de plus haut degré de $A(X) = X^2(X^3 - 4)(2X + 1)^2$. Même question pour $B(X) = (5X^2 + X - 3)^2 - X^3 + 2$.

Exercice 1.2

On considère le polynôme $P(X) = 3X^3 - 2X^2 - 7X + 6 = \sum_{k=0}^{3} a_k X^k$.

1. Donner a_0, a_1, a_2 et a_3.
2. Calculer toutes les dérivées successives de P en 0.
3. Trouver le lien entre $P(0)$ et les coefficients de P.
4. Faire de même pour $P'(0)$, $P''(0)$ et $P^{(3)}(0)$.
5. Proposer une formule générale reliant les dérivées successives de P en 0 aux coefficients de P. En déduire une nouvelle écriture de P.
6. ($\star$) Posons $Y = X - 1$.
   (a) Expliquer pourquoi $P(X)$ peut prendre la forme $Q(Y) = \sum_{k=0}^{3} b_k Y^k$ où pour $k \in [\![0, 3]\!]$, $b_k = \frac{Q^{(k)}(0)}{k!}$.
   (b) En déduire qu'on a aussi
   $$P(X) = \sum_{k=0}^{3} \frac{P^{(k)}(1)}{k!}(X - 1)^k$$

2 Division euclidienne de polynômes

2.1 Résumé

La division euclidienne sur les polynômes est similaire à celle sur les entiers, avec une condition sur le reste un peu différente puisqu'elle porte sur son degré.

Dans cette partie, nous vous demandons de maitriser cette division euclidienne, ainsi que la notion de divisibilité. Sachez tout de même que l'algorithme d'Euclide et le pgcd de polynômes se définissent aussi. La condition sur le degré du reste dans la division euclidienne nous garantit encore une fois la convergence de l'algorithme d'Euclide (car la suite des degrés des restes est positive et strictement décroissante tant que le reste est non nul). On pourrait donc une fois encore calculer algorithmiquement le PGCD de deux polynômes..

Enfin, remarquons qu'il existe d'autres types de division que la division euclidienne pour les polynômes [4], qui trouvent des niches d'utilisation différentes : c'est par exemple le cas de la division selon les puissances croissantes, qui utilise un procédé semblable à celui de la division euclidienne mais dans l'autre sens (en augmentant les degrés).

2.2 Exercices

Exercice 2.3

1. Effectuer la division euclidienne de $2X^4 - X^2 + X - 5$ par $X^2 + X - 2$.
2. Effectuer la division euclidienne de $X^3 + X + 1$ par $2X + 1$.

Exercice 2.4

1. Effectuer la division euclidienne de $X^4 + 2X^3 + X$ par $X^2 + 1$.
2. En déduire une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^4 + 2x^3 + x}{x^2 + 1} \end{array}\right.$

3 Racines et factorisation

3.1 Résumé

Les racines d'un polynôme représentent les solutions de l'équation polynomiale associée, c'est-à-dire les valeurs de l'indéterminée pour lesquelles l'expression va s'annuler. L'étude des racines permet donc de résoudre les nombreux problèmes faisant intervenir des modélisations polynomiales. D'autre part, le lien entre racine et factorisation vu à l'exercice 3-5 permet d'imaginer un procédé itératif de factorisation polynomiale, moyennant une méthode efficace pour trouver des racines.

Comme pour la multiplicité d'un facteur premier dans la décomposition d'un entier, la multiplicité d'une racine a d'un polynôme P correspond à la puissance de $(X - a)$ dans la décomposition en irréductibles de P. Une caractérisation par les dérivées successives est possible, puisque *grosso modo* la multiplicité d'une racine est décrémentée de 1 par la dérivation. Le fait qu'une racine est de multiplicité au moins 2 si et seulement si c'est aussi une racine de P' donne une manière assez simple d'isoler la partie d'un polynôme qui contient les facteurs au moins carrés : il suffirait pour cela, de calculer le PGCD de ce polynôme et de son polynôme dérivé [5].

Si l'on connaît des méthodes pour extraire les racines d'un polynôme de degré 2 (et également de degré 3 ou 4 via de longs changements de variables et l'utilisation des nombres complexes), il n'existe plus de résolution par radicaux [6] pour les degrés supérieurs. La recherche de racines de polynômes est encore un problème qui fait l'objet d'une abondante production d'algorithmes. Si pour les solutions réelles on peut imaginer utiliser des résultats d'analyse fonctionnelle (exemple : une recherche dichotomique grâce au théorème des valeurs intermédiaires), cela n'est plus valable pour les racines complexes. Ainsi, même des problèmes concernant des expressions polynomiales, c'est-à-dire engendrées par les opérations arithmétiques les plus simples, peuvent présenter une résolution extrêmement compliquée...

De même que pour les entiers, la factorisation de polynômes permet l'utilisation de stratégies diviser pour régner et la mise en place de moyens de parallélisation des calculs. Nous verrons plus tard l'intérêt

4. C'est déjà le cas pour les entiers, mais peu ont un réel intérêt. On peut néanmoins citer la division qui choisit un reste de plus petite valeur absolue possible : $-\frac{b}{2} < r \leqslant \frac{b}{2}$ que CamL utilise par exemple, qui donne un algorithme d'Euclide modifié un peu plus rapide.

5. C'est pourquoi la plupart des algorithmes de factorisation polynomiale, comme les algorithmes de Berlekamp et Cantor-Zassenhaus précédemment cités, se contentent de chercher à factoriser des polynômes sans facteur carré : le traitement qui consiste à traquer les facteurs multiples via un PGCD est une première étape implicite.

6. c'est-à-dire par des opérations arithmétiques basiques sur les coefficients et des extractions de racines.

des polynômes en algèbre linéaire (notamment en ce qui concerne la réduction des matrices carrées) et en quoi leur utilisation et leurs factorisations permettent de trivialiser des calculs à l'apparence complètement chaotique [7].

3.2 Exercices

Exercice 3.5

1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $a \in \mathbb{K}$. Quel est le reste dans la division euclidienne de P par $X - a$?
2. En déduire la propriété suivante :
$$(X - a) \mid P \Longleftrightarrow P(a) = 0$$
3. Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \neq b$. Montrer que
$$(X - a)(X - b) \mid P \Longleftrightarrow P(a) = P(b) = 0$$

Exercice 3.6

Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^*$.

1. (a) Rappeler ce que signifie (en termes de divisibilité) « a est une racine d'ordre de multiplicité au moins α de P » et « a est une racine d'ordre de multiplicité exactement α de P ».
   (b) Application : prenons $P(X) = (X^2 - X)(X - 1)^2(-1 - X) \in \mathbb{R}[X]$. Donner les racines de P ainsi que leurs ordres exacts de multiplicité.
2. (a) Rappeler le lien entre l'ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme et ses dérivées successives en cette racine.
   (b) On admet que le polynôme P ci-dessus s'écrit aussi $P(X) = -X^5 + 2X^4 - 2X^2 + X$. Retrouver les résultats de la question 1.(b) en utilisant les dérivées successives de P.
3. (a) Que signifie qu'un polynôme P est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$? Quels sont les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$?
   (b) Prenons $P(X) = (X^3 + X)(X^2 - 2X)$. Écrire P en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 3.7

1. On considère le polynôme $P(X) = X^4 + 2X^3 - X - 2$.
   (a) Montrer que 1 et -2 sont racines de P. Qu'en déduit-on en termes de divisibilité ?
   (b) En vous aidant d'une division euclidienne, factoriser P en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$et dans $\mathbb{C}[X]$.
2. ***(Travail personnel)*** On considère le polynôme $Q(X) = X^4 - 2X^3 - 3X^2 + 8X - 4$.
   (a) Montrer que 2 et -2 sont racines de Q. Qu'en déduit-on en termes de divisibilité ?
   (b) En vous aidant d'une division euclidienne, factoriser Q en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.
3. On considère le polynôme $R(X) = X^4 - 3X^3 - 3X^2 + 11X - 6$.
   (a) Montrer que 1 est racine de R. Quelle est sa multiplicité ? Qu'en déduit-on en termes de divisibilité ?
   (b) En vous aidant d'une division euclidienne, factoriser R en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

7. Et *vice versa*, comment on peut utiliser des méthodes de calcul matriciel et des résultats théoriques pour trouver des racines de polynômes. On peut par exemple imaginer une recherche récursive de racines d'un polynôme à l'aide de l'algorithme des puissances itérées appliqué à sa matrice compagnon.

Exercice 3.8

Soit $n \geqslant 2$.

1. Montrer que le polynôme $P(X) = (X+1)^{2n} - 1$ est divisible par $X^2 + 2X$.
2. Montrer que $(X-1)^2$ divise $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$.
3. Montrer que 1 est racine du polynôme $nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$. Quelle est sa multiplicité ?

Exercice 3.9

Déterminer le reste de la division euclidienne de $Q(X) = (X-2)^{2n} + (X-1)^n - 2$ par

1. $(X-2)(X-1)$.
2. $(X-1)^2$.

★ **Exercice 3.10**

Trouver tous les polynômes unitaires de degré 3, divisibles par $X - 1$ et dont les restes lors des divisions par $X - 2$, $X - 3$ et $X - 4$ sont égaux.