



## TD : Régimes transitoires - CORRIGE

[2526\_I\_INF\_FISE\_S02\_CN\_ERT]

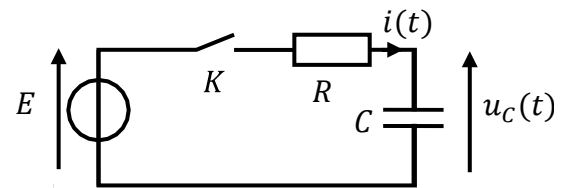
### Exercice 1

Soit le circuit ci-contre.

- On considère que le condensateur est initialement déchargé

A  $t = 0$ , on ferme  $K$ .

- Calculer  $u_C(t)$  quand  $t = 0^+$  et quand  $t \rightarrow \infty$ .



Quand  $t = 0^+$ , l'interrupteur vient juste de se fermer. Comme il y a continuité de la tension aux bornes du condensateur, alors  $u_C(t = 0^+) = u_C(t = 0^-) = 0$  car le condensateur était initialement déchargé.

Quand  $t \rightarrow \infty$ , le régime permanent est atteint et le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert. On a donc  $i(t) = 0$ , et donc, la tension aux bornes de la résistance est donc nulle aussi. L'application de la loi des mailles permet alors d'écrire :  $u_C(t \rightarrow \infty) = E$

- Déterminer l'équation différentielle relative à  $u_C(t)$  et en déduire la constante de temps  $\tau$  de ce circuit. En déduire l'expression de  $u_C(t)$  et tracer son allure.

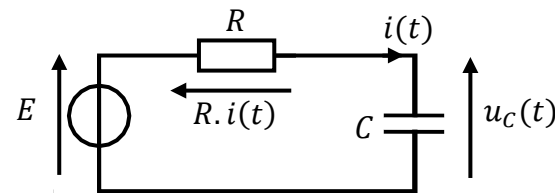
En appliquant la loi des mailles, on a :

$$E = R \cdot i(t) + u_C(t)$$

Or, on sait que  $i(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt}$ . Ce qui nous donne donc :

$E = R \cdot C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t)$  qu'on peut encore écrire :

$$\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC} u_C(t) = \frac{E}{RC}$$



Résolution de l'équation différentielle :

- Résolution de l'équation sans second membre

On cherche les solutions  $u_{C_{ssm}}(t)$  de l'équation différentielle  $\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC} u_C(t) = 0$ . On a donc :

$$\frac{du_C(t)}{dt} = -\frac{1}{RC} u_C(t)$$

$$\frac{du_c(t)}{u_c(t)} = -\frac{1}{RC} dt$$

En primitivant cette équation, on obtient :

$$\ln(u_c(t)) + cste_1 = -\frac{1}{RC} \cdot t + cste_2$$

Équation qu'on peut encore écrire :

$$\ln(u_c(t)) = -\frac{1}{RC} \cdot t + cste$$

On a donc, en appliquant la fonction exponentielle à cette équation :

$$u_c(t) = e^{-\frac{t}{RC} + cste} = e^{-\frac{t}{RC}} \cdot e^{cste}$$

Ce qui donne :

$$u_{C_{ssm}}(t) = \alpha \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \text{ où } \alpha \text{ est une constante}$$

- Solution particulière

On cherche **une** fonction  $u_c(t)$  qui soit solution de l'équation différentielle établie précédemment. Comme les coefficients et le second membre de cette équation différentielle sont des constantes, on peut trouver une fonction constante comme solution particulière. On la notera  $u_{C_{part}}$ . On doit donc avoir :

$$\frac{du_{C_{part}}(t)}{dt} + \frac{1}{RC} u_{C_{part}}(t) = \frac{E}{RC}$$

Comme on cherche  $u_{C_{part}} = cste$ , sa dérivée sera donc nulle. On aura donc :

$$u_{C_{part}} = E$$

Les solutions de l'équation différentielle sont donc de la forme :

$$u_c(t) = \alpha \cdot e^{-\frac{t}{RC}} + E$$

- Identification de la constante

On utilise les conditions initiales, à savoir  $u_c(t = 0^+) = 0$ .

On aura donc :

$$u_c(t = 0^+) = \alpha \cdot e^{-\frac{0}{RC}} + E = \alpha + E = 0$$

Donc :

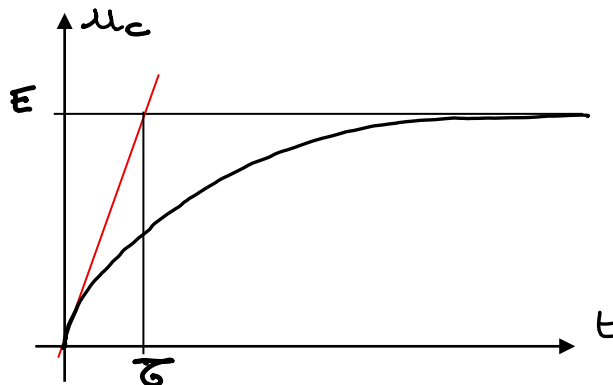
$$\alpha = -E$$

Conclusion :

$$u_c(t) = E - E \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = E \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

La constante de temps s'identifie soit sur l'équation différentielle quand le coefficient devant la dérivée est égal à 1 (coefficient unitaire), soit dans la solution.

On a ici  $\tau = RC$ .



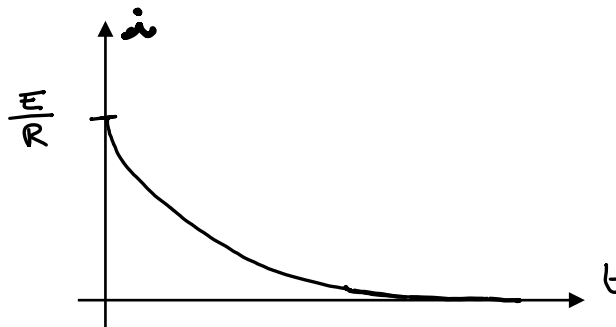
Rq : La droite rouge correspond à la tangente à l'origine. Avec une petite démonstration mathématique, on peut montrer qu'elle coupe la droite  $y = E$  en  $t = \tau$ .

c. Quelle est l'expression de  $i(t)$  ? Tracer son allure.

Comme on sait que  $i(t) = C \cdot \frac{du_c(t)}{dt}$ , on a :

$$i(t) = C \cdot \frac{d}{dt} \left( E - E \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \right) = C \cdot \left( 0 - E \cdot \left( -\frac{1}{RC} \right) \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

$$i(t) = \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$



2. On considère maintenant que le condensateur est initialement chargé sous la tension  $U_0 < E$ .

A  $t = 0$ , on ferme  $K$ .

a. Calculer  $u_c(t)$  quand  $t = 0^+$  et quand  $t \rightarrow \infty$ .

Quand  $t = 0^+$ , l'interrupteur vient juste de se fermer. Comme il y a continuité de la tension aux bornes du condensateur, alors  $u_c(t = 0^+) = u_c(t = 0^-) = U_0$  car le condensateur était initialement partiellement chargé.

Quand  $t \rightarrow \infty$ , le régime permanent est atteint et le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert. On a donc  $i(t) = 0$ , et donc, la tension aux bornes de la résistance est donc nulle aussi. L'application de la loi des mailles permet alors d'écrire :  $u_c(t \rightarrow \infty) = E$

- b. Déterminer l'équation différentielle relative à  $u_c(t)$  et en déduire la constante de temps  $\tau$  de ce circuit. En déduire l'expression de  $u_c(t)$  et tracer son allure.

La méthode est exactement la même que celle de la question 1.b. Seule la condition initiale change. L'équation différentielle relative à  $u_c(t)$  s'écrit donc :

$$\frac{du_c(t)}{dt} + \frac{1}{RC} u_c(t) = \frac{E}{RC}$$

Les solutions de l'équation différentielle seront de la forme :

$$u_c(t) = \alpha \cdot e^{-\frac{t}{RC}} + E$$

- Identification de la constante

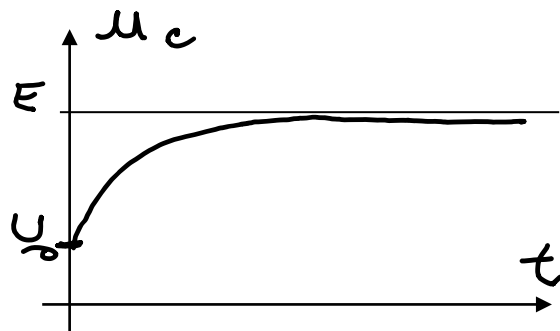
On utilise les conditions initiales, à savoir  $u_c(t = 0^+) = U_0$ .

On aura donc :

$$u_c(t = 0^+) = \alpha \cdot e^{-\frac{0}{RC}} + E = \alpha + E = U_0$$

Conclusion :

$$u_c(t) = E + (U_0 - E) \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

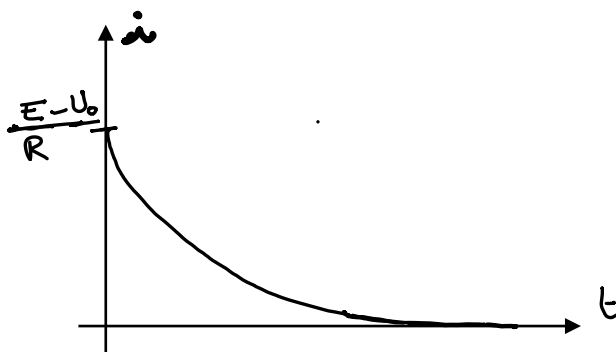


- c. Quelle est l'expression de  $i(t)$  ? Tracer son allure.

De la même manière que précédemment, comme on sait que  $i(t) = C \cdot \frac{du_c(t)}{dt}$ , on a :

$$i(t) = C \cdot \frac{d}{dt} \left( E + (U_0 - E) \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \right) = C \cdot \left( 0 + (U_0 - E) \cdot \left( -\frac{1}{RC} \right) \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

$$i(t) = \frac{E - U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$



## Exercice 2

Soit le circuit ci-contre :

A  $t = 0$ , on ferme  $K$  ( $i(t) = 0$  pour  $t < 0$ )

a) Calculer  $i(t)$  et  $u(t)$  quand  $t = 0^+$  et quand  $t \rightarrow \infty$ .

Quand  $t = 0^+$ , l'interrupteur vient juste de se fermer. Comme il y a continuité du courant dans une bobine, alors  $i(t = 0^+) = i(t = 0^-) = 0$  car à  $t = 0^-$ , l'interrupteur était ouvert. La loi des mailles permet alors d'obtenir  $u_L(t = 0^+) = E$ , car la tension aux bornes de la résistance est alors nulle (courant nul).

Quand  $t \rightarrow \infty$ , le régime permanent est atteint et la bobine se comporte comme un fil. On a donc  $u_L(t \rightarrow \infty) = 0$ . L'application de la loi des mailles permet alors d'écrire :  $i(t \rightarrow \infty) = \frac{E}{R}$

b) Déterminer l'équation différentielle relative à  $i(t)$  et en déduire la constante de temps  $\tau$  de ce circuit. En déduire l'équation de  $i(t)$  et tracer son allure.

En appliquant la loi des mailles, on a :

$$E = R \cdot i(t) + u_L(t)$$

Or, on sait que  $u_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$ . Ce qui nous donne donc :  $E = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt}$  qu'on peut encore écrire :

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L} i(t) = \frac{E}{L}$$

Résolution de l'équation différentielle :

- Résolution de l'équation sans second membre

On cherche les solutions  $i_{ssm}(t)$  de l'équation différentielle  $\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L} i(t) = 0$ . On a donc :

$$\frac{di(t)}{dt} = -\frac{R}{L} i(t)$$

$$\frac{di(t)}{i(t)} = -\frac{R}{L} dt$$

En primitivant cette équation, on obtient :

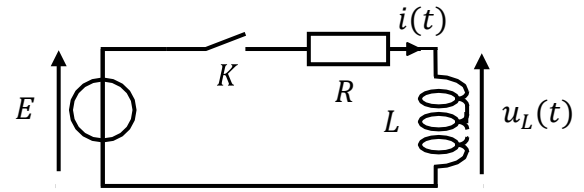
$$\ln(i(t)) + cste_1 = -\frac{R}{L} \cdot t + cste_2$$

Équation qu'on peut encore écrire :

$$\ln(i(t)) = -\frac{R}{L} \cdot t + cste$$

On a donc, en appliquant la fonction exponentielle à cette équation :

$$i(t) = e^{-\frac{R}{L}t + cste} = e^{-\frac{R}{L}t} \cdot e^{cste}$$



Ce qui donne :

$$i_{ssm}(t) = \alpha \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \text{ où } \alpha \text{ est une constante}$$

- Solution particulière

On cherche **une** fonction  $i(t)$  qui soit solution de l'équation différentielle établie précédemment. Comme les coefficients et le second membre de cette équation différentielle sont des constantes, on peut trouver une fonction constante comme solution particulière. On la notera  $i_{part}$ . On doit donc avoir :

$$\frac{di_{part}(t)}{dt} + \frac{R}{L}i_{part}(t) = \frac{E}{L}$$

Comme on cherche  $i_{part} = cste$ , sa dérivée sera donc nulle. On aura donc :

$$i_{part} = \frac{E}{R}$$

Les solutions de l'équation différentielle sont donc de la forme :

$$i(t) = \alpha \cdot e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E}{R}$$

- Identification de la constante

On utilise les conditions initiales, à savoir  $i(t = 0^+) = 0$ .

On aura donc :

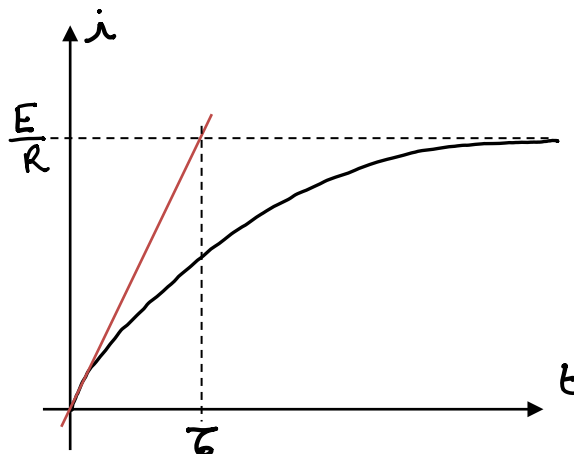
$$i(t = 0^+) = \alpha \cdot e^{-\frac{R}{L}0} + \frac{E}{R} = \alpha + \frac{E}{R} = 0$$

Donc :

$$\alpha = -\frac{E}{R}$$

Conclusion :

$$i(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$$



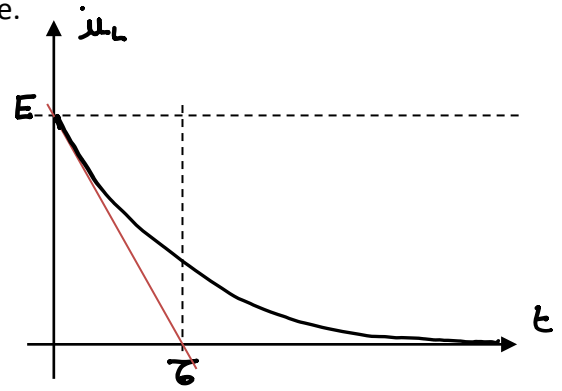
c) Quelle est l'expression de  $u_L(t)$  ? Tracer son allure.

Comme on sait que  $u_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$ , on a :

$$u_L(t) = L \cdot \frac{d}{dt} \left( \frac{E}{R} - \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

$$= L \cdot \left( 0 - \frac{E}{R} \cdot \left( -\frac{R}{L} \right) \cdot e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

$$u_L(t) = E \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

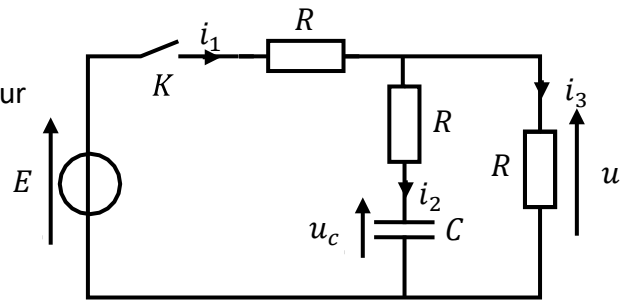


### Exercice 3

On considère le circuit suivant, dans lequel l'interrupteur  $K$  est ouvert depuis suffisamment longtemps pour que le condensateur soit déchargé.

1. A  $t = 0$ , on ferme l'interrupteur  $K$ .

a) Etude Qualitative : Remplir le tableau suivant :



	$i_1(t)$	$i_2(t)$	$i_3(t)$	$u_c(t)$	$u(t)$
$t = 0^+$	$\frac{2E}{3R}$	$\frac{E}{3R}$	$\frac{E}{3R}$	<b>0<sup>(1)</sup></b>	$\frac{E}{3}$
$t \rightarrow \infty$	$\frac{E}{2R}$	<b>0<sup>(2)</sup></b>	$\frac{E}{2R}$	$\frac{E}{2}$	$\frac{E}{2}$

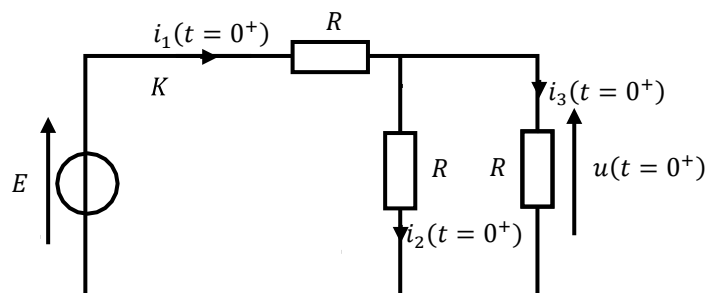
Rq : J'ai mis en couleur les valeurs qu'on peut placer en premier dans le tableau.

(1) :  $u_c(t = 0^+) = 0$  car il y a continuité de la tension aux bornes d'un condensateur et que le condensateur est initialement déchargé.

(2) :  $i_2(t \rightarrow \infty) = 0$  car en régime permanent continu, un condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert

• Schéma équivalent du circuit à  $t = 0^+$  (et seulement à cet instant !!) :

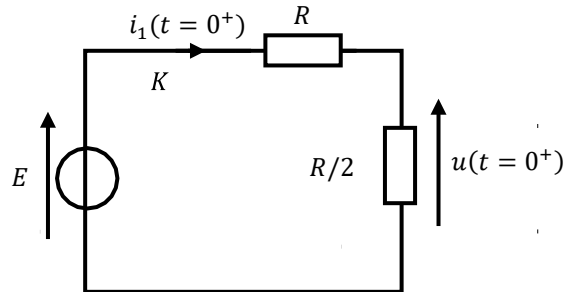
Comme on a  $u_c(t = 0^+) = 0$ , on peut considérer que le condensateur se comporte comme un fil au moment de la fermeture de l'interrupteur. On a donc :



On a donc :

$$i_2 = i_3 = \frac{u}{R}$$

En associant les deux résistances de gauche qui sont en parallèle, on a :



La formule du Pont Diviseur de Tension donne alors :

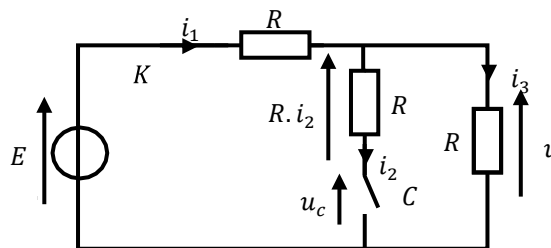
$$u(t = 0^+) = \frac{\frac{R}{2}}{\frac{R}{2} + R} \cdot E = \frac{E}{3}$$

On obtient alors :

$$i_2(t = 0^+) = i_3(t = 0^+) = \frac{E}{3R}$$

$$i_1(t = 0^+) = i_2(t = 0^+) + i_3(t = 0^+) = \frac{2E}{3R}$$

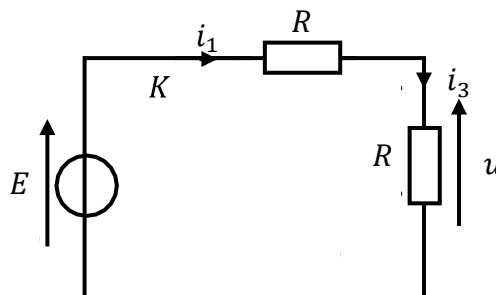
• Quand  $t \rightarrow \infty$ , on a :



La tension  $R \cdot i_2$  est donc nulle (car  $i_2(t \rightarrow \infty) = 0$ ). La loi des mailles donne donc :

$$u_c(t \rightarrow \infty) = u(t \rightarrow \infty)$$

On peut redessiner le schéma ainsi :



La formule du Pont Diviseur de Tension donne :

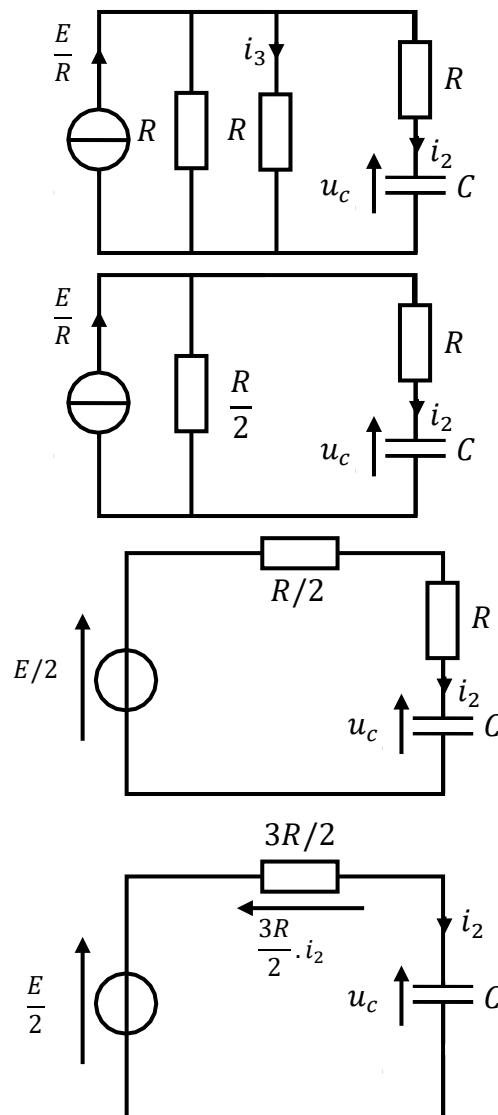
$$u(t \rightarrow \infty) = \frac{R}{R + R} \cdot E = \frac{E}{2} = u_c(t \rightarrow \infty)$$

Puis, on a :

$$i_1(t \rightarrow \infty) = i_3(t \rightarrow \infty) = \frac{u(t \rightarrow \infty)}{R} = \frac{E}{2R}$$

- b) On souhaite déterminer l'équation de  $i_2(t)$ . Etablir l'équation différentielle qui régit le circuit et trouver alors l'expression de  $i_2(t)$ . Vous donnerez cette équation en fonction de  $E$ ,  $R$  et  $C$ . Quelle est la constante de temps  $\tau$  de ce circuit ?

Une façon simple de raisonner pour ce genre de problème, c'est d'essayer de se ramener à un circuit simple qu'on a déjà étudié, comme celui de l'exercice 1. En utilisant les équivalences Thévenin/Norton, on obtient (on rappelle qu'on peut ordonner les branches en parallèle comme on veut !) :



La loi des mailles donne :

$$\frac{E}{2} = \frac{3R}{2} \cdot i_2(t) + u_c(t) \quad (1)$$

De plus, on sait que :

$$i_2(t) = C \cdot \frac{du_c(t)}{dt} \quad (2)$$

Si on exprime  $u_C(t)$  en fonction de  $i_2(t)$  à l'aide de l'équation (2), on va se retrouver avec une primitive. Il est donc préférable d'exprimer  $u_C(t)$  en fonction de  $i_2(t)$  à l'aide de la loi des mailles (équation (1)) et d'injecter l'expression obtenue dans l'équation (2). On peut aussi dériver l'équation (1) et remplacer  $\frac{du_C(t)}{dt}$  par  $\frac{i_2(t)}{C}$ .

On obtient donc :

$$\frac{di_2(t)}{dt} + \frac{2}{3RC} i_2(t) = 0$$

L'équation différentielle obtenue est une équation différentielle du 1<sup>er</sup> ordre sans second membre. On peut suivre la même démarche que dans les exercices précédents, et montrer que les solutions sont de la forme :

$$i_2(t) = \alpha \cdot e^{-\frac{2}{3RC}t}$$

La constante  $\alpha$  se détermine en utilisant les conditions initiales. On sait que  $i_2(0) = \frac{E}{3R} = \alpha$

Donc :

$$i_2(t) = \frac{E}{3R} \cdot e^{-\frac{2}{3RC}t}$$

On peut donc identifier  $\tau$  dans l'équation différentielle, ou dans la réponse  $i_2(t)$ , et on obtient donc :

$$\tau = \frac{3RC}{2}$$

2. Une fois le régime permanent établi, on ouvre l'interrupteur. On pose alors  $t' = 0$ .

a) Etude Qualitative : Remplir le tableau suivant :

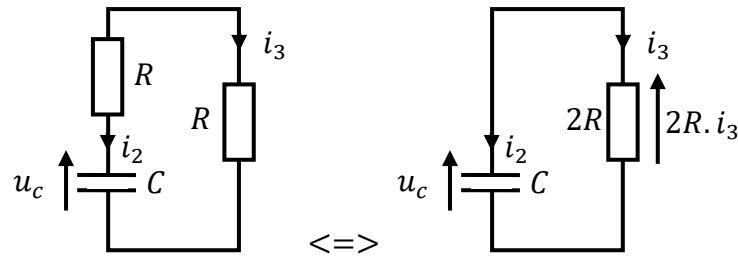
	$i_2(t')$	$i_3(t')$	$u_C(t')$
$t' = 0^+$	$-\frac{E}{4R}$	$\frac{E}{4R}$	$\frac{E^{(1)}}{2}$
$t' \rightarrow \infty$	0	0	0

Rq : J'ai mis en couleur la valeur qu'on peut placer en premier dans le tableau.

(1) :  $u_C(t' = 0^+) = \frac{E}{2}$  car il y a continuité de la tension aux bornes d'un condensateur et que avant l'ouverture de l'interrupteur, le régime permanent était atteint et  $u_C(t) = \frac{E}{2}$  d'après la partie précédente.

Quand on ouvre  $K$ , toute la partie gauche du circuit est déconnectée. Le condensateur, qui s'était chargé pendant le temps où l'interrupteur  $K$  était fermé, se décharge donc dans les 2 résistances. Comme ce n'est pas un « vrai » générateur, une fois toute l'énergie emmagasinée dans le condensateur a été dissipée par effet Joule dans les résistances, il n'y a plus ni courant, ni tension.

Pour remplir la ligne  $t' = 0^+$ , il faut donc travailler sur le circuit suivant :



On remarque que  $i_2(t') = -i_3(t')$  et la loi des mailles donne  $u_c(t') = 2R \cdot i_3(t')$

Ce qui donne :

$$i_3(t' = 0^+) = \frac{u_c(t' = 0^+)}{2R} = \frac{E}{4R} = -i_2(t' = 0^+)$$

- b) Etude Quantitative : Etablir la nouvelle équation  $i_2(t')$  du courant circulant dans le condensateur. Vous exprimerez votre résultat en fonction de  $E$ ,  $R$  et  $C$ . Quelle est la constante de temps  $\tau$  de ce circuit ?

La loi des mailles donne :

$$u_c(t') - 2R \cdot i_3(t') = 0$$

soit :

$$u_c(t') + 2R \cdot i_2(t') = 0 \quad (1)$$

De plus, on sait que :

$$i_2(t') = C \cdot \frac{du_c(t')}{dt} \quad (2)$$

Comme précédemment, si on exprime  $u_c(t)$  en fonction de  $i_2(t)$  à l'aide de l'équation (2), on va se retrouver avec une primitive. Il est donc préférable d'exprimer  $u_c(t)$  en fonction de  $i_2(t)$  à l'aide de la loi des mailles (équation (1)) et d'injecter l'expression obtenue dans l'équation (2). On peut aussi dériver l'équation (1) et remplacer  $\frac{du_c(t)}{dt}$  par  $\frac{i_2(t)}{C}$ .

On obtient donc :

$$\frac{di_2(t')}{dt} + \frac{1}{2RC} i_2(t') = 0$$

L'équation différentielle obtenue est une équation différentielle du 1<sup>er</sup> ordre sans second membre. On peut suivre la même démarche que dans les exercices précédents, et montrer que les solutions sont de la forme :

$$i_2(t') = \alpha \cdot e^{-\frac{1}{2RC} \cdot t'}$$

La constante  $\alpha$  se détermine en utilisant les conditions initiales. On sait que  $i_2(0) = -\frac{E}{4R} = \alpha$ .

Donc :

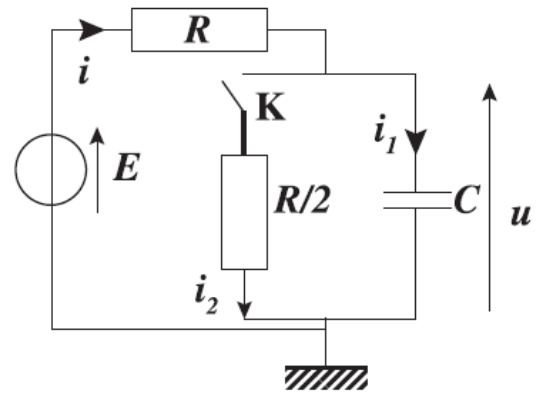
$$i_2(t') = -\frac{E}{4R} \cdot e^{-\frac{1}{2RC} \cdot t'}$$

On peut donc identifier  $\tau$  dans l'équation différentielle, ou dans la réponse  $i_2(t')$ , et on obtient donc :

$$\tau = 2RC$$

### Exercice 4

On considère le montage ci-contre. Initialement le condensateur est déchargé, le générateur éteint et l'interrupteur ouvert.



1. L'interrupteur reste ouvert, et, à  $t = 0$ , on allume le générateur. Déterminer  $u(t)$ . Quelle est la constante de temps de ce circuit ? Quelle est la tension finale ? Au bout de combien de temps peut-on considérer qu'elle est atteinte ?

*K étant ouvert, la résistance  $R/2$  ne joue aucun rôle, il s'agit d'un circuit RC série, et ce cas est exactement celui du l'exercice 1.*

*On obtient donc :*

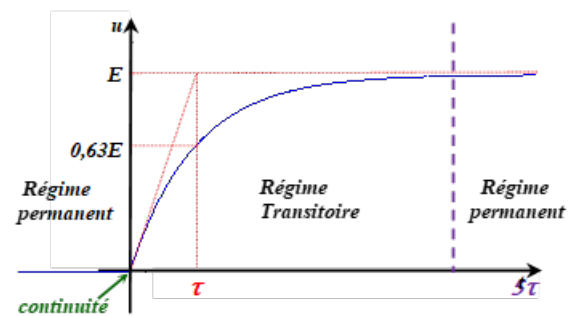
$$u(t) = E - E \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = E \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

*La constante de temps est donc :*

$$\tau = RC$$

*On obtient la courbe ci-contre où figure  $\tau$ .*

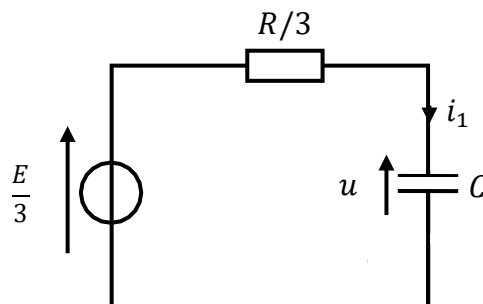
*La tension finale est celle observée quand le régime permanent continu est atteint, soit  $u(t \rightarrow \infty) = E$ . Cette valeur est théoriquement atteinte au bout d'un temps infini, en pratique, l'écart entre la tension  $u(t)$  et sa limite devient inférieure à 1% au bout de  $5\tau$  et inférieure 0,005 % au bout de  $10\tau$ .*



On suppose que la tension finale précédente est atteinte depuis longtemps et on ferme l'interrupteur. On choisit cet instant comme nouvelle origine des temps ( $t' = 0$ ).

2. Montrer, en transformant le réseau, que le circuit est équivalent à un simple circuit de type RC dont on précisera les caractéristiques. En déduire l'équation différentielle vérifiée par  $u(t')$  ainsi que la solution  $u(t')$ . Tracer l'allure de  $u(t')$ .

*En utilisant les équivalences Thévenin/Norton, on peut alors mettre le circuit sous la forme suivante :*



*On est à nouveau dans le cas de l'exercice 1, mais, avec un condensateur initialement chargé.*

L'équation différentielle va alors s'écrire :

$$\frac{du(t')}{dt} + \frac{3}{RC}u(t') = \frac{E}{RC}$$

Les solutions de cette équation différentielle sont alors de la forme :

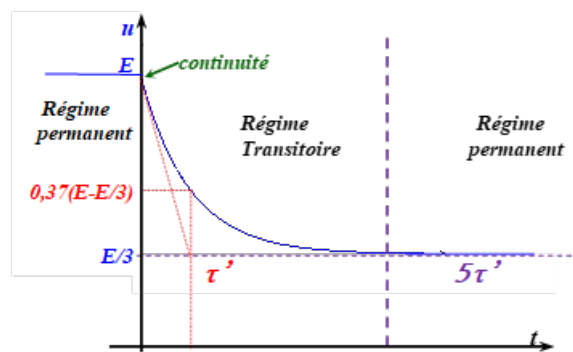
$$u(t') = \alpha \cdot e^{-\frac{3}{RC}t'} + \frac{E}{3}$$

Pour identifier la constante  $\alpha$ , on utilise les conditions initiales, qui correspondent aux valeurs atteintes en régime permanent de la question 1. On a alors  $u(t' = 0) = E = \alpha + \frac{E}{3}$ , ce qui donne  $\alpha = \frac{2E}{3}$ .

On a donc :

$$u(t') = \frac{2E}{3} \cdot e^{-\frac{3}{RC}t'} + \frac{E}{3} = \frac{E}{3} \left( 2 \cdot e^{-\frac{3}{RC}t'} + 1 \right)$$

Rq : Quand le régime permanent sera atteint, on aura  $u(t' \rightarrow \infty) = \frac{E}{3} < E = u(t' = 0)$ . Le condensateur va donc partiellement se décharger.



3. Quelle est la constante de temps de ce circuit ? La mettre en évidence sur la courbe.

On peut donc identifier  $\tau'$  dans l'équation différentielle, ou dans la réponse  $u(t')$ , et on obtient donc :

$$\tau' = \frac{RC}{3}$$

Sur la courbe, la tangente à l'origine coupe toujours l'asymptote en  $t = \tau'$ .

### Pour aller plus loin... Etincelle de rupture (Exercice facultatif)

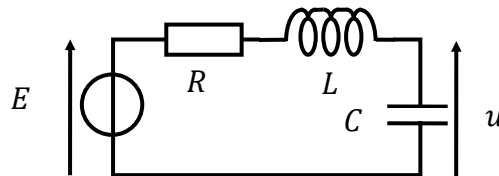
On place une bobine d'inductance  $L$  dans un circuit comprenant un générateur de tension  $E$  constante et un interrupteur  $K$ . La résistance totale du circuit est modélisée par une résistance  $R$ . On prendra  $R = 40\Omega$ ,  $E = 40V$  et  $L = 4mH$ .

Le régime permanent étant établi, on ouvre brusquement l'interrupteur  $K$ . On assimile la coupure ainsi réalisée à un condensateur de capacité  $C = 10pF$ .

Etudier la tension  $u(t)$  aux bornes de la coupure. Montrer, compte tenu des valeurs numériques données, que  $u$  croît rapidement et que le potentiel explosif (de l'ordre de  $1000V$ ) est très rapidement atteint.

Le régime permanent étant établi avant de rouvrir l'interrupteur, la bobine est équivalente à un fil et le courant dans le circuit vaut  $\frac{E}{R} = 1A$ .

Quand on ouvre l'interrupteur, comme on assimile cette coupure à un condensateur, on obtient le circuit suivant :



A l'aide de la loi des mailles et des relations courant/tension des composants, on peut montrer que la tension  $u$  est solution de l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = E \omega_0^2 \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

On montre que les solutions de cette équation différentielle sont de la forme :

$$u(t) = E + e^{-\frac{t}{2\tau}} (\alpha \cos(\omega_0 t) + \beta \sin(\omega_0 t)) \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{R}$$

Les constantes  $\alpha$  et  $\beta$  se déterminent en utilisant les conditions initiales et les continuités pour les condensateurs et bobines. On trouve :

$$\begin{cases} \alpha = -E \\ \beta \approx \frac{E}{RC\omega_0} \end{cases}$$

Ce qui donne :

$$u(t) = E \left( 1 + e^{-\frac{t}{2\tau}} \left( \frac{1}{RC\omega_0} \sin(\omega_0 t) - \cos(\omega_0 t) \right) \right)$$

Or,  $\frac{1}{RC\omega_0} = 500$ , on peut donc encore écrire :

$$u(t) = E \left( 1 + e^{-\frac{t}{2\tau}} \frac{1}{RC\omega_0} \sin(\omega_0 t) \right)$$

Quelques ordres de grandeur :

$$\begin{cases} \omega_0 = 5.10^6 \text{ rad. s}^{-1} \\ T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 1,2.10^{-6} \text{ s} \\ \tau = 10^{-4} \text{ s} \end{cases}$$

En prenant la valeur à  $t = \frac{T_0}{4}$  ( $\Rightarrow \sin(\omega_0 t) = 1$ ), on aura  $u_{Max} \approx E(1 + 500) \approx 20\,000 \text{ V}$

Conclusion : La tension d'éclatement de l'étincelle (ou potentiel explosif)  $u = 1\,000 \text{ V}$  est atteinte en un temps inférieur à  $3.10^{-7} \text{ s}$ .