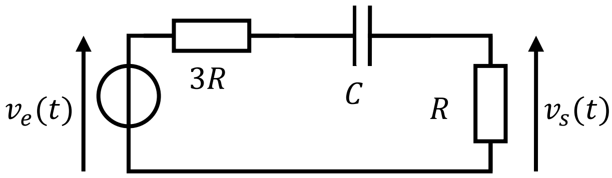
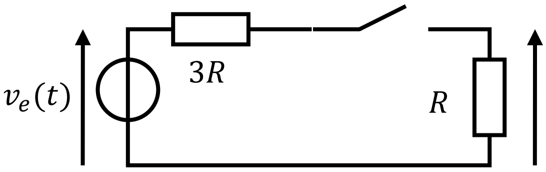
TD : Études des filtres - CORRIGE

[2526_I_INF_FISE_S02_CN_FIL]

Pour chaque circuit, déterminer le type de filtre ainsi que la fonction de transfert. Puis, la mettre sous forme normalisée.

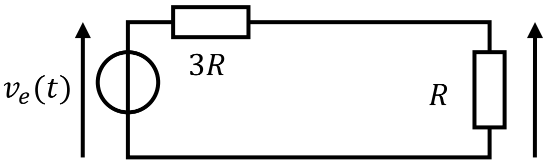
1. 

- Etude qualitative (Etude asymptotique)
  - En TBF :



$v_s(t) \to 0$
$A(\omega) \to 0$

  - En THF :

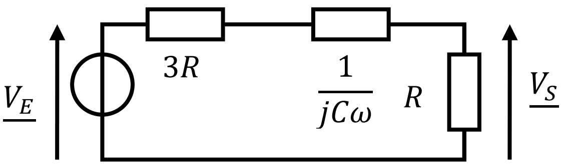


$v_s(t) \to \frac{1}{4} . v_e(t)$
$A(\omega) \to \frac{1}{4}$

Cl : Il s'agit d'un filtre passe-haut

- Fonction de transfert

On passe en représentation complexe.



D'après la formule du Pont Diviseur de Tension, on obtient :

$$\underline{V_S} = \frac{R}{3R + \frac{1}{jc\omega} + R} \cdot \underline{V_E}$$

On obtient donc :

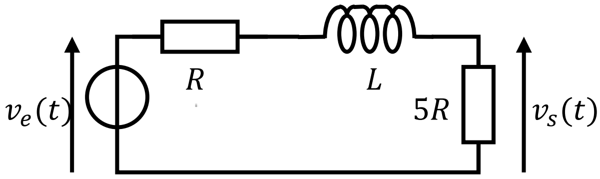
$$\underline{T}(\omega) = \frac{jRC\omega}{1 + 4jRC\omega}$$

Mise sous forme normalisée :

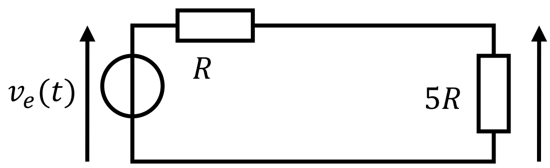
$$\underline{T}(\omega) = \frac{1}{4} \times \frac{4jRC\omega}{1 + 4jRC\omega}$$

Par identification, on obtient alors : $\begin{cases} A_{Max} = \frac{1}{4} \ (= A_{THF}) \\ \omega_c = \frac{1}{4RC} \end{cases}$

2.

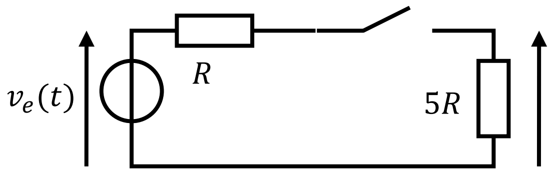


- <u>Etude qualitative</u> (Etude asymptotique)
  - En TBF :



$$v_s(t) \to \frac{5}{6} . v_e(t)$$
$$A(\omega) \to \frac{5}{6}$$

  - En THF :

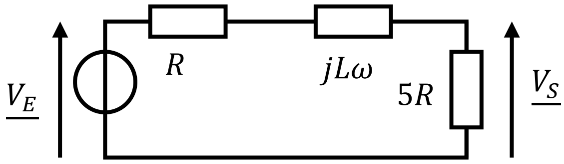


$$v_s(t) \to 0$$
$$A(\omega) \to 0$$

<u>Cl</u> : Il s'agit d'un filtre passe-bas

- <u>Fonction de transfert</u>

On passe en représentation complexe.



D'après la formule du Pont Diviseur de Tension, on obtient :

$$\underline{V_S} = \frac{5R}{R + jL\omega + 5R} \cdot \underline{V_E}$$

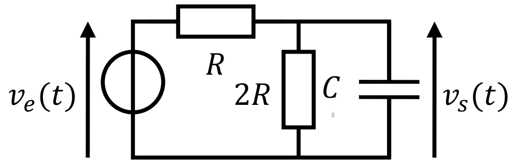
On obtient donc :

$$\underline{T}(\omega) = \frac{5R}{6R + jL\omega}$$

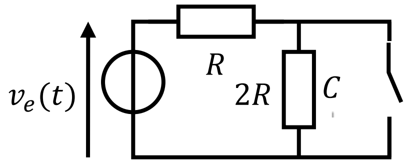
Mise sous forme normalisée :

$$\underline{T}(\omega) = \frac{5\cancel{R}}{6\cancel{R}} \times \frac{1}{1 + j\frac{L}{6R}\omega}$$

Par identification, on obtient alors : $\begin{cases} A_{Max} = \frac{5}{6}\ (= A_{TBF}) \\ \omega_c = \frac{6R}{L} \end{cases}$

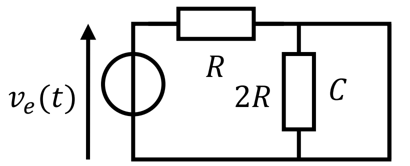
3. 

- Etude qualitative (Etude asymptotique)
    - En TBF :



$$v_s(t) \to \frac{2R}{2R + R} \cdot v_e(t) = \frac{2}{3} \cdot v_e(t)$$
$$A(\omega) \to \frac{2}{3}$$

- En THF :

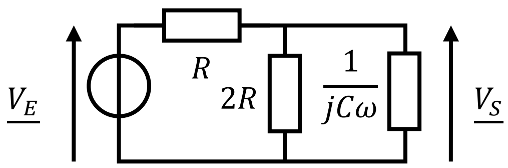


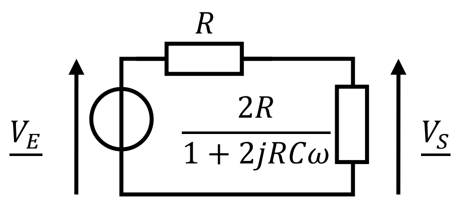
$$v_s(t) \to 0$$
$$A(\omega) \to 0$$

Cl : Il s'agit d'un filtre passe-bas

- Fonction de transfert

On passe en représentation complexe.





D'après la formule du Pont Diviseur de Tension, on obtient :

$$\underline{V_S} = \frac{\dfrac{2R}{1+2jRC\omega}}{R+\dfrac{2R}{1+2jRC\omega}} \cdot \underline{V_E}$$

On obtient donc :

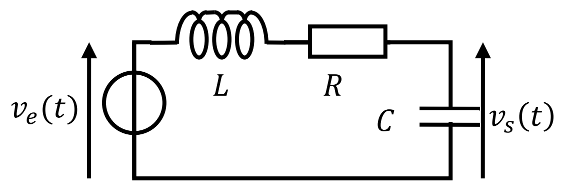
$$\underline{T}(\omega) = \frac{2}{3+2jRC\omega}$$

Mise sous forme normalisée :

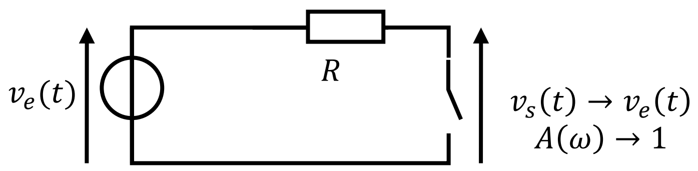
$$\underline{T}(\omega) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{1+\frac{2}{3}jRC\omega}$$

Par identification, on obtient alors : $\begin{cases} A_{Max} = \frac{2}{3} (= A_{TBF}) \\ \omega_c = \frac{3}{2RC} \end{cases}$

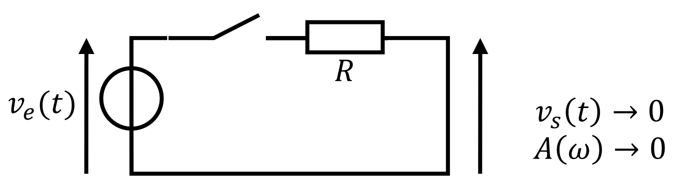
4.



- Etude qualitative (Etude asymptotique)
  - En TBF :



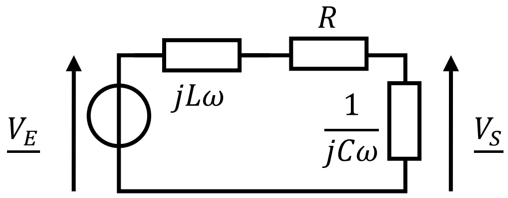
  - En THF :



Cl : Il s'agit d'un filtre passe-bas

- <u>Fonction de transfert</u>

  On passe en représentation complexe.



D'après la formule du Pont Diviseur de Tension, on obtient :

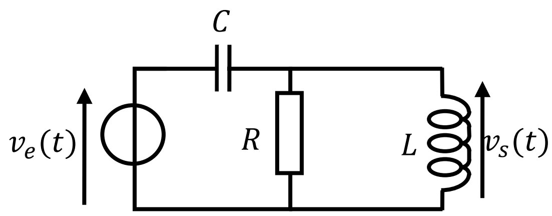
$$\underline{V_S} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + R + jL\omega} \cdot \underline{V_E}$$

On obtient donc :

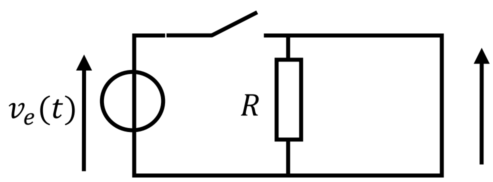
$$\underline{T}(\omega) = \frac{1}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}$$

Mise sous forme normalisée : Par identification, on obtient alors :

$$\begin{cases} A_0 = 1 (= A_{TBF}) \\ \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = LC\omega^2 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ 2\sigma\frac{\omega}{\omega_0} = RC\omega \Rightarrow \sigma = \frac{RC}{2}\omega_0 = \frac{RC}{2\sqrt{LC}} \end{cases}$$

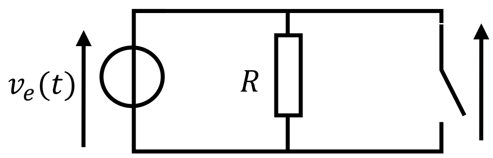
5. 

- <u>Etude qualitative</u> (Etude asymptotique)
  - En TBF :



$v_s(t) \to 0$
$A(\omega) \to 0$

  - En THF :

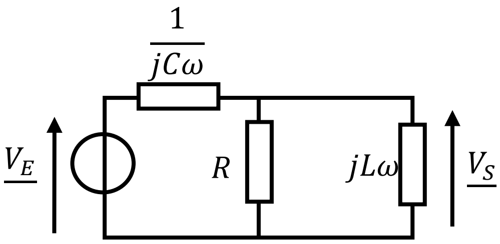


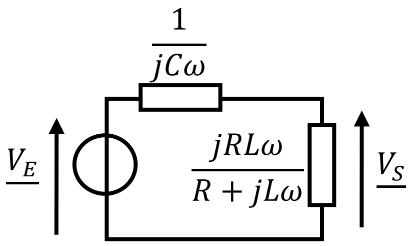
$v_s(t) \to v_e(t)$
$A(\omega) \to 1$

<u>Cl</u> : Il s'agit d'un filtre passe-haut

- <u>Fonction de transfert</u>

  On passe en représentation complexe.





D'après la formule du Pont Diviseur de Tension, on obtient :

$$\underline{V_S} = \frac{\frac{jRL\omega}{R+jL\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + \frac{jRL\omega}{R+jL\omega}} \cdot \underline{V_E}$$

On obtient donc :

$$\underline{T}(\omega) = \frac{-RLC\omega^2}{R + jL\omega - RLC\omega^2}$$

Mise sous forme normalisée :

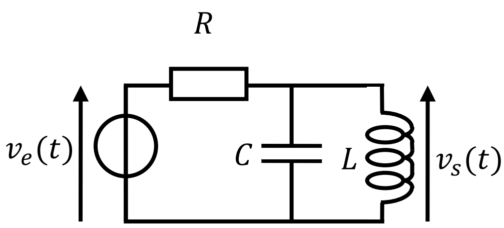
$$\underline{T}(\omega) = \frac{-RLC\omega^2}{R\left(1 + j\frac{L}{R}\omega - LC\omega^2\right)}$$

$$\underline{T}(\omega) = \frac{-LC\omega^2}{1 + j\frac{L}{R}\omega - LC\omega^2}$$

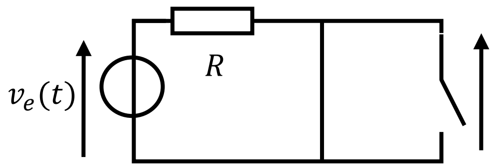
Par identification, on obtient alors :

$$\begin{cases} A_0 = 1 (= A_{THF}) \\ \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = LC\omega^2 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ 2\sigma\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{L}{R}\omega \Rightarrow \sigma = \frac{L}{2R}\omega_0 = \frac{L}{2R\sqrt{LC}} \end{cases}$$

6.



- <u>Etude qualitative</u> (Etude asymptotique)
  - En TBF et en THF :

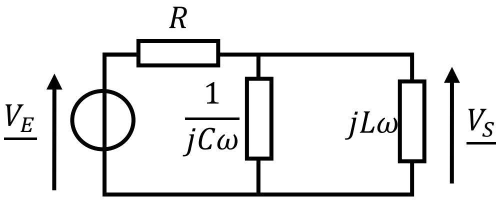


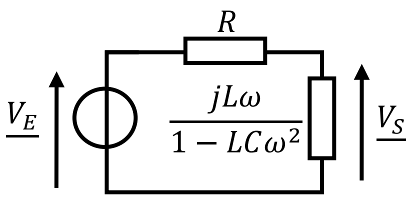
$v_s(t) \to 0$
$A(\omega) \to 0$

<u>Cl</u> : Il s'agit d'un filtre passe-bande

- <u>Fonction de transfert</u>

On passe en représentation complexe.





D'après la formule du Pont Diviseur de Tension, on obtient :

$$\underline{V_S} = \frac{\frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}}{R + \frac{jL\omega}{1 - LC\omega^2}} \cdot \underline{V_E}$$

On obtient donc :

$$\underline{T}(\omega) = \frac{jL\omega}{R + jL\omega - RLC\omega^2}$$

Mise sous forme normalisée :

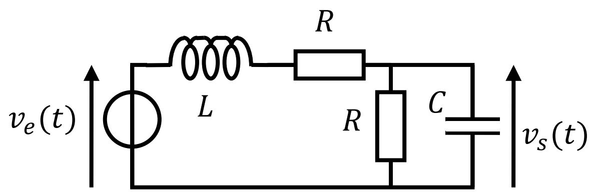
$$\underline{T}(\omega) = \frac{jL\omega}{R\left(1 + j\frac{L}{R}\omega - LC\omega^2\right)}$$

$$\underline{T}(\omega) = \frac{R.j\frac{L}{R}\omega}{R\left(1 + j\frac{L}{R}\omega - LC\omega^2\right)}$$

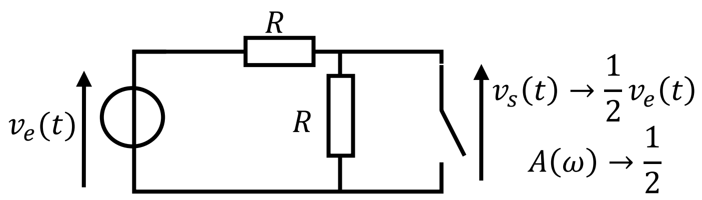
$$\underline{T}(\omega) = \frac{j\frac{L}{R}\omega}{1 + j\frac{L}{R}\omega - LC\omega^2}$$

Par identification, on obtient alors :

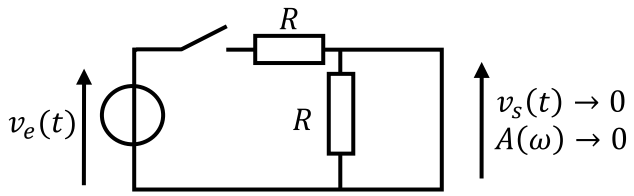
$$\begin{cases} A_0 = 1(= A_{Max}) \\ \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = LC\omega^2 => \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ 2\sigma\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{L}{R}\omega => \sigma = \frac{L}{2R}\omega_0 = \frac{L}{2R\sqrt{LC}} \end{cases}$$

7. 

- Etude qualitative (Etude asymptotique)
  - En TBF :



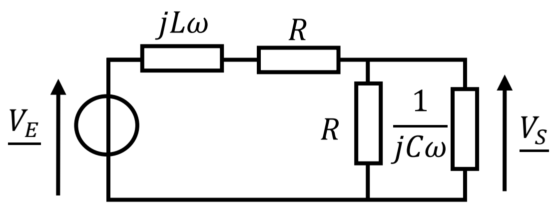
  - En THF :

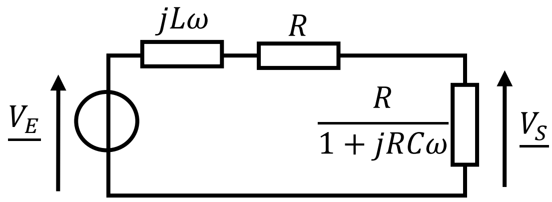


Cl : Il s'agit d'un filtre passe-bas

- Fonction de transfert

On passe en représentation complexe.





D'après la formule du Pont Diviseur de Tension, on obtient :

$$\underline{V_S} = \frac{\frac{R}{1+jRC\omega}}{R + jL\omega + \frac{R}{1+jRC\omega}} \cdot \underline{V_E}$$

On obtient donc :

$$\underline{T}(\omega) = \frac{R}{2R + jR^2C\omega + jL\omega - RLC\omega^2}$$

Mise sous forme normalisée :

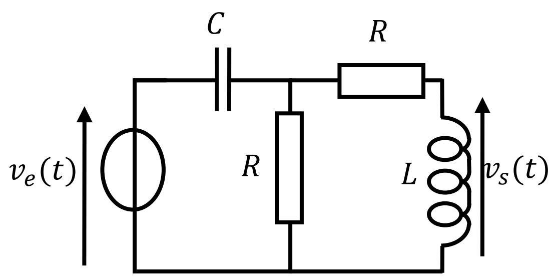
$$\underline{T}(\omega) = \frac{R}{2R\left(1 + j\frac{1}{2}\left(RC + \frac{L}{R}\right)\omega - \frac{LC}{2}\omega^2\right)}$$

$$\underline{T}(\omega) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + j\frac{1}{2}\left(RC + \frac{L}{R}\right)\omega - \frac{LC}{2}\omega^2}$$

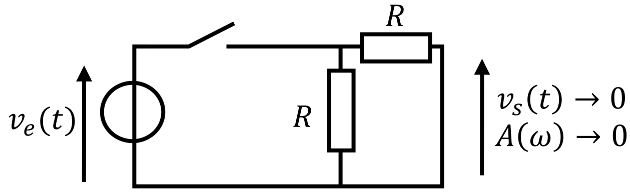
Par identification, on obtient alors :

$$\begin{cases} A_0 = \frac{1}{2} (= A_{TBF}) \\ \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = \frac{LC}{2}\omega^2 => \omega_0 = \sqrt{\frac{2}{LC}} \\ 2\sigma\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{1}{2}\left(RC + \frac{L}{R}\right)\omega => \sigma = \frac{\omega_0}{4}\left(RC + \frac{L}{R}\right) \end{cases}$$

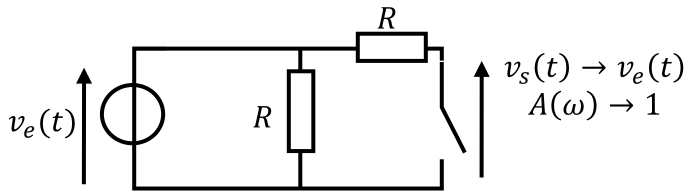
8.



- <u>Etude qualitative</u> (Etude asymptotique)
  - En TBF :



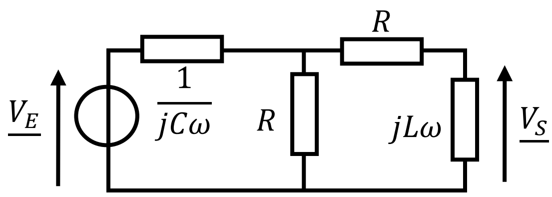
- En THF :



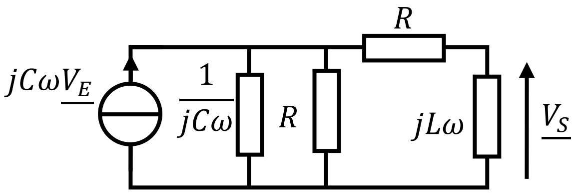
Cl : Il s'agit d'un filtre passe-haut

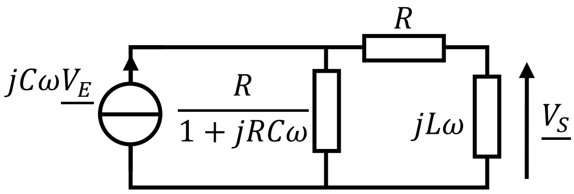
- Fonction de transfert

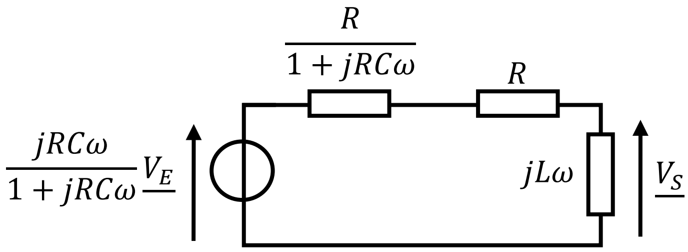
On passe en représentation complexe.



En utilisant les équivalences Thévenin/Norton, on peut simplifier le circuit :







D'après la formule du Pont Diviseur de Tension, on obtient :

$$\underline{V_S} = \frac{jL\omega}{\frac{R}{1+jRC\omega} + R + jL\omega} \cdot \frac{jRC\omega}{1+jRC\omega} \cdot \underline{V_E}$$

$$\underline{V_S} = \frac{-RLC\omega^2}{R + R + jR^2C\omega + jL\omega - RLC\omega^2} \cdot \underline{V_E}$$

On obtient donc :

$$\underline{T}(\omega) = \frac{-RLC\omega^2}{2R + jR^2C\omega + jL\omega - RLC\omega^2}$$

Mise sous forme normalisée :

$$\underline{T}(\omega) = \frac{-RLC\omega^2}{2R\left(1 + j\frac{1}{2}\left(RC + \frac{L}{R}\right)\omega - \frac{LC}{2}\omega^2\right)}$$

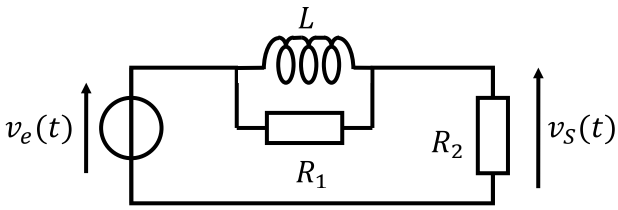
$$\underline{T}(\omega) = \frac{2R}{2R} \cdot \frac{-\frac{LC}{2}\omega^2}{1 + j\frac{1}{2}\left(RC + \frac{L}{R}\right)\omega - \frac{LC}{2}\omega^2}$$

Par identification, on obtient alors :

$$\begin{cases} A_0 = 1 (= A_{THF}) \\ \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = \frac{LC}{2}\omega^2 => \omega_0 = \sqrt{\frac{2}{LC}} \\ 2\sigma\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{1}{2}\left(RC + \frac{L}{R}\right)\omega => \sigma = \frac{\omega_0}{4}\left(RC + \frac{L}{R}\right) \end{cases}$$

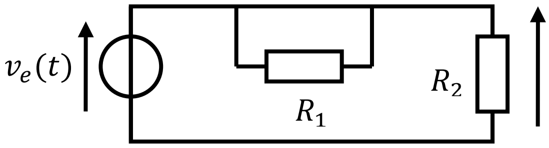
Bonus :

1. Soit le circuit ci-contre :



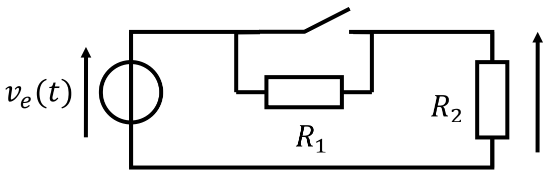
   a. Déterminer les valeurs limites du gain quand $f \to 0$ et $f \to \infty$ et en déduire le type de filtre.

      a. En TBF ($f \to 0$) :



$$v_S(t) \to v_e(t)$$
$$A(\omega) \to 1$$
$$G(\omega) \to 0$$

      b. En THF ($f \to \infty$) :



$$v_S(t) \to \frac{R_2}{R_1+R_2} v_e(t)$$
$$A(\omega) \to \frac{R_2}{R_1+R_2}$$
$$G(\omega) \to 20\log\left(\frac{R_2}{R_1+R_2}\right)$$

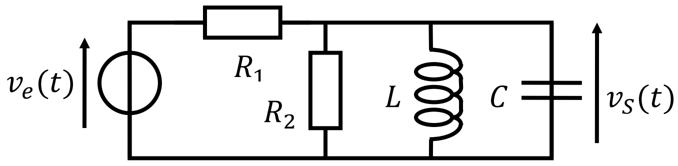
<u>Cl</u> : Il s'agit d'un filtre passe-bas ($A_{TBF} > A_{THF}$).

   b. Calculer R_2 pour que $G_{min} = -12dB$ si $R_1 = 3\ k\Omega$. (rappel : log 2 = 0,3)

$G_{min} = G_{THF} = 20\log\left(\frac{R_2}{R_1+R_2}\right)$. De plus, comme $-12 = -40.\log(2)$, on aura :

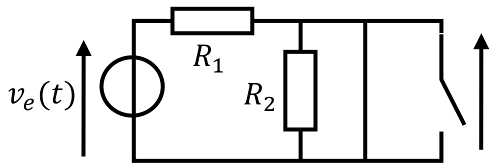
$$20\log\left(\frac{R_2}{R_1+R_2}\right) = -40.\log(2)$$
$$\log\left(\frac{R_2}{R_1+R_2}\right) = -2.\log(2)$$
$$\log\left(\frac{R_1+R_2}{R_2}\right) = \log(4)$$
$$\frac{R_1+R_2}{R_2} = 4$$
$$R_1 + R_2 = 4R_2$$
$$R_2 = \frac{1}{3}R_1 = 1k\Omega$$

2. Soit le circuit ci-contre :



   a. Déterminer les valeurs limites du gain quand $f \to 0$ et $f \to \infty$ et en déduire le type de filtre.

      En TBF ($f \to 0$) et en THF ($f \to \infty$) :



$$v_s(t) \to 0$$
$$A(\omega) \to 0$$
$$G(\omega) \to -\infty$$

<u>Cl</u> : Il s'agit d'un filtre passe-bande

   b. Calculer l'admittance (= inverse de l'impédance) du dipôle (R_2, L, C)

      On note $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$. Comme R_2, L et C sont en parallèle, et si on note $\underline{Z_{eq}}$, l'impédance équivalente du dipôle (R_2, L, C), alors, on aura :

$$\underline{Y_{eq}} = \frac{1}{\underline{Z_{eq}}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{jL\omega} + jC\omega$$

$$\underline{Y_{eq}} = \frac{1}{R_2} - j\frac{1}{L\omega} + jC\omega$$

$$\underline{Y_{eq}} = \frac{1}{R_2} + j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)$$

   c. A quelle fréquence (en fonction de L et C) le gain sera-t-il maximum ?

      <u>Expression de la fonction de transfert</u> :

$$\underline{T}(\omega) = \frac{\frac{1}{\underline{Y_{eq}}}}{R_1 + \frac{1}{\underline{Y_{eq}}}} = \frac{1}{1 + R_1\left(\frac{1}{R_2} + j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)\right)}$$

      L'amplification $A(\omega) = \left|\underline{T}(\omega)\right|$ aura donc pour expression :

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)^2 + R_1^2\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}}$$

      Comme le gain est défini par $G(\omega) = 20\log\left(A(\omega)\right)$, G sera maximal quand A sera maximal.

A sera maximal quand $\sqrt{\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)^2 + R_1^2\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}$ sera minimal, autrement dit, quand $\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)^2 + R_1^2\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2$ sera minimal. Comme c'est une somme de 2 termes positifs, la somme sera minimale si on peut rendre minimal – voire annuler - un des 2 termes. $\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)^2 = cste$, on cherche donc à minimiser $R_1^2\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2$.

Or, on voit que $\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2$ peut être nul si $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Le gain sera donc maximum pour $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, soit $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

d. Calculer R_2 pour que $G_{Max} = -9\ dB$ si $R_1 = 1\ k\Omega$.

On sait que G sera maximal pour $\omega = \omega_0$ et que, $A(\omega_0) = \sqrt{\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)^2} = \frac{R_2}{R_1+R_2}$

$$G_{Max} = 20\log\left(\frac{R_2}{R_1+R_2}\right) = -9dB$$

$$\log\left(\frac{R_1+R_2}{R_2}\right) = 0{,}45$$

$$\frac{R_1+R_2}{R_2} = 10^{0{,}45} = 2{,}81$$

$$R_2 = 550\Omega$$