Contrôle de cours (1 heure)

Nom : **Prénom :** **Classe :**

N.B. :

— **Ce contrôle comporte deux parties distinctes associées aux ECUE EV et ALM. Chaque partie est calibrée pour durer 30 minutes mais c'est à vous de gérer votre temps.**

— **Chacune des deux parties est sur 20 points. Il y aura deux notes distinctes.**

1 Contrôle de cours sur l'ECUE EV (durée : 30 minutes). Note EV : /20

Cours 1 : familles de vecteurs (12 points)

1. Soient E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{F} = (u_1, \ldots, u_n)$ une famille de n vecteurs de E ($n \in \mathbb{N}^*$).

   (a) Donner la définition mathématique, avec les quantificateurs, de : « $\mathscr{F}$ est une famille libre de E ».

   ....

   (b) Donner la caractérisation mathématique, avec les quantificateurs, de : « $\mathscr{F}$ est une base de E ».

   ....

   (c) Donner un exemple d'une famille libre de $E = \mathbb{R}^3$ qui ne soit pas une base. Ne pas justifier.

   ....

   (d) Donner un exemple d'une base de $E = \mathbb{R}^2$ autre que la base canonique. Ne pas justifier.

   ....

2. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie égale à 4. Soit $\mathscr{F}$ une famille de vecteurs de E.
   Dans les phrases suivantes, entourer **toutes** les réponses plausibles parmi les mots « libre », « génératrice » et « liée ».

   a. Si $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) = 3$ alors $\mathscr{F}$ peut être : libre génératrice liée
   b. Si $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) = 5$ alors $\mathscr{F}$ peut être : libre génératrice liée
   c. Si $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) = 6$ alors $\mathscr{F}$ est forcément : libre génératrice liée
   d. Si $\mathrm{Card}(\mathscr{F}) = 4$ alors $\mathscr{F}$ peut être : libre génératrice liée

3. On se place dans $E = \mathbb{R}_2[X]$. On admet que la famille $\mathscr{B} = \big(P_1 = 1, P_2 = X + 1, P_3 = X^2 - X\big)$ est **une famille libre** de E.

   (a) Justifier que $\mathscr{B}$ est une base de E.

   ....
   ....

   (b) Donner $Q \in E$ dont les coordonnées de Q dans la base $\mathscr{B}$ sont 1, 2 et 3 (en respectant l'ordre des vecteurs de $\mathscr{B}$).

   ....
   ....

   (c) Rappeler ce qu'est $\mathscr{B}_c$ la base canonique de E. Donner les coordonnées de P_3 d'une part dans la base $\mathscr{B}$, d'autre part dans la base $\mathscr{B}_c$.

   ....
   ....
   ....
   ....

Cours 2 : autour du Vect (8 points)

Les questions sont indépendantes.

1. Dans $\mathbb{R}^2$, on considère $F = \text{Vect}((1, 2))$. Écrire cet ensemble avec une autre notation ensembliste et le dessiner dans le plan.

2. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère deux vecteurs non nuls u_1 et u_2. Soit $F = \left\{\alpha u_1 + \beta u_2, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\right\}$. Comment peut-on réécrire F ? Que représente-t-il géométriquement dans $\mathbb{R}^3$? Soyez précis.

3. On se place dans $\mathbb{R}_2[X]$. Soit $F = \text{Vect}(P_1 = 1, P_2 = X^2 - X, P_3 = X^2 - X - 1)$.

   Dire si $Q = 2X^2 - 2X - 5$ et $R = X^2$ sont des éléments de F. **Justifier.**

2 Contrôle de cours sur l'ECUE ALM (durée : 30 minutes). Note ALM : /20

Cours 1 : définitions et propriétés (12 points)

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et $f : E \longrightarrow F$.

1. Donner la définition mathématique de : f est linéaire de E vers F.

   ....

2. Donner la définition mathématique du noyau de f dans le contexte précis où $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $F = \mathbb{R}^2$.

   ....

3. Donner la définition mathématique de l'image de f dans le contexte précis où $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $F = \mathbb{R}^2$.

   ....

4. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$ (E et F quelconques).

   (a) Compléter la phrase suivante :

   $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de ...... et $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de ......

   (b) Rappeler la définition mathématique (=celle du séminaire, avec les quantificateurs !) de « f surjective de E vers F » et donner proprement une condition nécessaire et suffisante reliant le noyau et/ou l'image de f à cette notion.

   ....
   ....
   ....

   (c) Rappeler la définition mathématique (=celle du séminaire, avec les quantificateurs !) de « f injective de E vers F », donner et **démontrer** proprement une condition nécessaire et suffisante reliant le noyau et/ou l'image de f à cette notion.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

[Tournez la page svp]

Cours 2 : exemples (8 points)

Les questions sont indépendantes.

1. Proposer une application non linéaire de $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^2$. Ne pas justifier.

....
....
....
....

2. Trouver rigoureusement une base du noyau de l'application linéaire $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-z,\, 0,\, x-z) \end{array} \right.$

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

3. Proposer une application linéaire g de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$ telle que $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Vect}\left((1,2)\right)$. Justification non demandée.

....
....
....
....