Contrôle de cours APEF (1 heure)

Nom : Prénom : Classe :

N.B. : Le barème est sur 20 points. **Note :** /20

1 Polynômes (7 points)

Les questions sont indépendantes.

1. Soit $(A, B) \in (\mathbb{R}[X])^2$ avec $B \neq 0$. Énoncer le théorème de la division euclidienne de A par B.

   ....
   ....

2. Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose que a est une racine d'ordre de multiplicité exactement 3 de P.

   (a) En termes de divisibilité, que cela signifie-t-il ?

   ....

   (b) Donner une condition nécessaire et suffisante sur P et ses dérivées pour être dans ce cas là.

   ....

3. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré strictement supérieur à 3. Mettre les symboles $\Longrightarrow$, $\Longleftarrow$ ou $\Longleftrightarrow$ à la place des pointillés. Si aucun symbole n'est possible, mettre une croix.

   a) $X+3 \mid P$ ...... -3 racine de P **b)** $(X-1)^3 \mid P$ ...... $P(1) = 0$ et $P'(1) = 0$ **c)** $X \mid P$ ...... $P(X) = X^4 - X$

   d) $P(0) = P(2) = 0$ ...... $X^2 - 2X \mid P$ **e)** $P'(1) = 0$ ...... $(X-1) \mid P$

4. Donner l'ordre de multiplicité exact de la racine 1 de $P(X) = (X-1)^4(X^2 - X)$. **Justifier**.

   ....
   ....
   ....

5. Donner un exemple d'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré 6 qui admet -1 comme racine d'ordre de multiplicité exactement 3 et tel que $P(-3) = P'(-3) = 0$.

   ....

6. Soit $P(X) = X^5(2X+4)^2(X^2 - 5X + 6)(X^2 + X + 3)$. Écrire P comme produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ (justifier brièvement).

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

2 Équations différentielles linéaires du premier ordre (5,5 points)

Soient a, b et c trois fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall\, t \in \mathbb{R},\ a(t) \neq 0$.

On considère les équations différentielles $(E)\ : a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$ et $(E_0)\ : a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$.

On note S l'ensemble des solutions de (E) et S_0 l'ensemble des solutions de (E_0).

Un professeur demande à un élève d'expliciter précisément l'ensemble S_0 au tableau. L'élève note alors :

$$S_0 = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & ke^{-F(t)} \end{array}, k \in \mathbb{R} \right\}.$$

1. Le professeur demande à l'élève d'être plus précis et d'écrire F en fonction de a et de b. Qu'écrit l'élève ? Vous donnerez aussi F' en fonction de a et de b.

   ....

2. Montrer l'inclusion $S_0 \subset \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & ke^{-F(t)} \end{array}, k \in \mathbb{R} \right\}$. On admet l'inclusion réciproque.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

3. Soit y_p une solution particulière de (E). Donner S en fonction de S_0 et y_p.

   ....
   ....

4. Continuer les 2 phrases suivantes.

   (a) Une solution particulière évidente de $(E_1)\ : 2y' - 3y = 6$ est ....

   (b) Une solution particulière évidente de $(E_2)\ : 2y' - xy = x$ est ....

3 Équations différentielles linéaires du second ordre (2 points)

On considère l'équation différentielle (E) $ay'' + by' + cy = 0$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ avec $a \neq 0$.

On note (C) l'équation caractéristique associée à (E). Continuer les phrases ci-dessous :

1. (C) est l'équation mathématique : ....
2. Si 3 et -4 sont les deux racines réelles de (C) alors l'ensemble des solutions de (E) est formé des fonctions de la forme :

   ....

   ....

3. Si $-2 + 3i$ est une des deux racines complexes de (C) alors l'ensemble des solutions de (E) est formé des fonctions de la forme :

   ....

   ....

4. Si (C) admet -7 comme racine double réelle alors l'ensemble des solutions de (E) est formé des fonctions de la forme :

   ....

   ....

4 Étude locale de fonctions (5,5 points)

Les questions sont indépendantes.

1. Donner le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 4 de

   (a) $\ln(1+x)$. Le DL est : $\ln(1+x) =$ ....

   (b) $\sin(x)$. Le DL est : $\sin(x) =$ ....

2. Soient f et g deux fonctions telles qu'au voisinage de 0, $f(x) = x - 2x^2 + x^3 + o(x^3)$ et $g(x) = 1 + 3x - x^2 + o(x^2)$.

   (a) Donner (sans justifier) un équivalent simple en 0 de $f(x)$ et de $g(x) - 1$.

   ....

   (b) Donner une autre façon d'écrire $o(x^3)$.

   ....

   (c) À quel ordre maximal peut-on avoir le DL de $f(x) + g(x)$? Trouver ce DL dans ce cas là.

   ....

   ....

   (d) Donner le DL à l'ordre 2 de $f(x) \times g(x)$.

   ....

   ....

   ....

   ....