Contrôle de cours APEF (1 heure)

Nom : **Prénom :** **Classe :**

N.B. : Le barème est sur 20 points. **Note :** /20

1 Polynômes (8 points)

Cours 1 : divisibilité et division euclidienne (2,5 points)

Les questions sont indépendantes.

1. Soient P et B deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que la division euclidienne de P par B se traduit par l'égalité suivante :

$$P(X) = (X+2)(X^3+1) + 2X^2 - X + 2$$

Déterminer B ainsi que le reste de cette division euclidienne dans ce cas. Justifier.

2. Trouver le quotient et le reste de la division euclidienne de $A(X) = -X^4 + 3X - 5$ par $B(X) = X^2 + 1$.

Cours 2 : autour des racines (5,5 points)

Les questions sont indépendantes. Pour les questions 2., 3. et 4., ce n'est pas la peine de donner les polynômes sous une forme développée.

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré strictement supérieur à 3. Mettre les symboles $\Longrightarrow$, $\Longleftarrow$ ou $\Longleftrightarrow$ à la place des pointillés.

   a) -1 racine de P ...... $(X+1) \mid P$ **b)** $(X-1)^2 \mid P$ ...... $P(1) = 0$ **c)** $P(0) = 0$ ...... $P(X) = X^4 + X$

   d) $P(1) = P(2) = 0$ ...... $(X-1)(X-2) \mid P$ **e)** $(X-1)^3 \mid P$ ...... $P(1) = P'(1) = 0$

2. Donner un exemple d'un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré 3 ayant -1 et 2 comme racines simples.

3. Donner un exemple d'un polynôme de $Q \in \mathbb{R}[X]$, de degré 5 ayant -2 comme racine d'ordre de multiplicité exactement égal à 3.

4. Donner un exemple d'un polynôme de $A \in \mathbb{R}[X]$, de degré 4 vérifiant $A(0) = 0$ et $A(-3) = A'(-3) = 0$.

5. Dans la liste de polynômes ci-dessous, entourer les polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$:

   a) $2X+1$ **b)** $X^2 + X$ **c)** $X^3 + X + 1$ **d)** $X^2 - 1$ **e)** $X^2 + X + 1$

2 Équations différentielles (6 points)

Soient a, b et c trois fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall t \in \mathbb{R},\ a(t) \neq 0$.

On considère l'équation différentielle $(E)\ : a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t)$.

On note S l'ensemble des solutions de (E) et S_0 l'ensemble des solutions de (E_0) l'équation homogène associée à (E).

1. Donner S_0.

....

....

....

2. Soit y_p une solution particulière de (E) sur $\mathbb{R}$. Notons $B = \{y_p + y_0\ ;\ y_0 \in S_0\}$.

   (a) Dans le texte ci-dessous, continuer naturellement les phrases incomplètes (là où il y a des pointillés. Vous pouvez rajouter des lignes si besoin).

   Soit $f \in B$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $f(t) =$ .... avec $y_0 \in S_0$.

   f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) =$ ....

   Ainsi,

   $\forall t \in I,\ a(t)f'(t) + b(t)f(t) =$ ....

   $=$ ....

   $=$ .... car ....

   Donc $f \in$ ....

   (b) Entourer l'inclusion que vous venez de démontrer : a) $S \subset B$ b) $B \subset S$

   (c) Démontrer que $S = B$ en faisant l'autre inclusion.

[Suite des pointillés page suivante]

3. Trouver a, b et c trois fonctions telles que l'équation $(E)\ :\ a(t)y' + b(t)y = c(t)$ ait pour ensemble de solutions :

$$S = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & ke^{\operatorname{arctan}(t)} + 1 \end{array}, k \in \mathbb{R} \right\}$$

3 Développements limités usuels (6 points)

Donner pour chaque fonction ci-dessous le développement limité en 0 à l'ordre 3.

1. $e^x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

2. $\cos(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

3. $\ln(1+x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

4. $\sin(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

5. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $(1+x)^\alpha = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

6. (Pour celui-là, vous détaillerez les calculs) $f : x \longmapsto \sqrt{1+x}$