/20

Contrôle de cours - ECUE EFDP (1 heure)

Nom : Le Cras **Prénom :** Brieuc **Classe :** PA-1

Le barème est sur 30. La note sera ramenée à un note sur 20 par règle de 3. **Note :** 19,5 /20

Bravo

Cours 1 : ensembles (4 points)

29/30

On considère les ensembles $A = \{x \in \mathbb{R}, -2 < x \leq 5\}$ et $B = \{n \in \mathbb{N}, n < 13\}$.

0,5

1. De quel ensemble commun A et B sont-ils deux sous-ensembles ? Réponse : de l'ensemble $\mathbb{R}$ ✓

2. Dans chacune des phrases suivantes, remplacer les pointillés afin de la rendre vraie (remplacer les pointillés par $\emptyset$ est interdit). *Exemple : pour ...... $\in B$, on peut remplacer les pointillés par 2 car $2 \in B$.*

2,5

a) $\{3\} \subset A$ ✓ b) $14 \notin A \cup B$ ✓ c) $\{1,2,3\} \subset A \cup B$ ✓ d) $3 \in A \cap B$ ✓ e) $(1,2) \in A \times B$ ✓

3. A et B sont-ils de cardinal fini ? Si oui, préciser le cardinal de l'ensemble.

1

B a un cardinal fini tel que card(B) = 13, cependant A a un cardinal ~~fini~~ infini qui possède une multitude d'élément dans l'intervalle]-2, 5]

Cours 2 : ensembles et fonctions - partie 1 (5,5 points)

Soient E et F deux ensembles et une fonction $f : E \longrightarrow F$.

1. Soit $A \subset E$. Donner la définition mathématique de $f(A)$.

1

$f(A) = \{f(x) ; x \in A\} = \{y \in F ; \exists x \in E ; y = f(x)\}$ ✓

2. Soit $B \subset F$. Donner la définition mathématique de $f^{-1}(B)$.

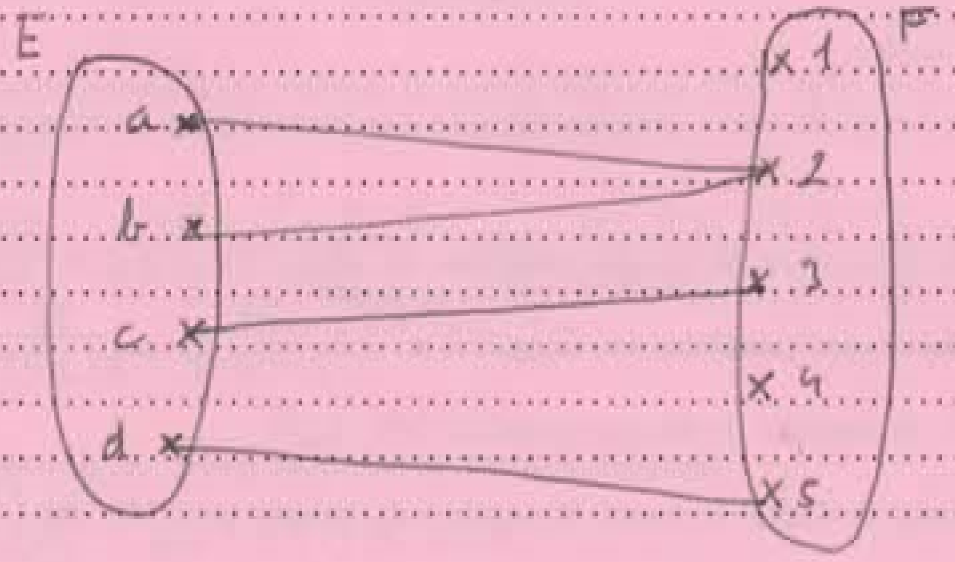
1

$f^{-1}(B) = \{x \in E ; f(x) \in B\}$ ✓

Bien

3. On suppose dans cette question que $E = \{a, b, c, d\}$ et $F = [\![1, 5]\!]$. Dessiner (patates) une fonction f qui vérifie à la fois $f(\{b, c\}) = \{2, 3\}$ et $f^{-1}(\{2\}) = \{a, b\}$.

1,5



4. On suppose dans cette question que $E = F = \mathbb{R}$ et $f : x \longmapsto x^2$.

(a) Donner $f(\{-4, 2\})$ et $f([-3, 1])$.

2

$f(\{-4, 2\}) = \{16, 4\}$ ✓ $f([-3, 1]) = \{x \in \mathbb{R}, 0 \leq x \leq 9\}$ ✓

(b) Donner $f^{-1}(\{4\})$ et $f^{-1}([0, 2])$.

$f^{-1}(\{4\}) = \{-2, 2\}$ ✓ $f^{-1}([0, 2]) = \{x \in \mathbb{R}, -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}\}$ ✓

TB

Cours 3 : ensembles et fonctions - partie 2 (5 points)

Soient E et F deux ensembles et une fonction $f : E \longrightarrow F$.

1. Donner la définition mathématique de : « f est injective de E vers F »

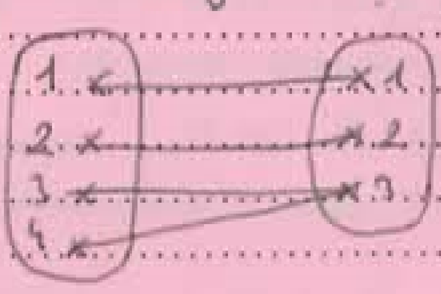
1 $\forall (x, x') \in E^2, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ on on peut dire $\forall (x, x') \in E^2, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$

2. Donner la définition mathématique de : « f est surjective de E vers F »

1 f est surjective si $\{ \forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y \}$

3. Supposons $E = [\![1, 4]\!]$ et $F = [\![1, 3]\!]$. Est-il possible de définir une fonction f surjective de E vers F dans ce cas là ? Si oui, dessiner (patates) une de ces fonctions.

On peut définir une fonction surjective de E vers F car card(E) ≥ card(F)



1,5

4. Supposons $E = [\![1, 4]\!]$ et $F = [\![1, 3]\!]$. Est-il possible de définir une fonction f injective de E vers F dans ce cas là ? Si oui, dessiner (patates) une de ces fonctions.

Il est impossible de définir une fonction injective de E vers F car card(E) > card(F)

1,5

Cours 4 : dénombrement 1 (6 points)

Dans un jeu classique de 32 cartes, on tire 5 cartes.

N.B. : les calculs ne sont pas à faire jusqu'au bout ! Si votre réponse est une combinaison ou un arrangement, vous donnerez son expression avec les factorielles.

1. Si le tirage est successif et sans remise, le nombre de tirages possibles est $A_{32}^{5} = \frac{32!}{(32-5)!} = \frac{32!}{27!} = 32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28$
2. Si le tirage est simultané, le nombre de tirages possibles est $C_{32}^{5} = \binom{32}{5} = \frac{32!}{5!(32-5)!} = \frac{32!}{5!\,27!} = 31 \times 29 \times 28 \times 8$
3. Si le tirage est successif et avec remise, le nombre de tirages possibles est 32^5
4. Si le tirage est simultané et qu'on obtient la dame de cœur, le nombre de tirages possibles est $\binom{1}{1}\binom{31}{4} = 1 \times \frac{31!}{27!}$

6

5. Le tirage des 5 cartes est fait. On a obtenu un 7, deux 9 et deux 8. Combien peut-on écrire de nombres (à 5 chiffres) avec les chiffres obtenus à ce tirage ? Justifier brièvement. *Exemple : on peut obtenir le nombre 79988...*

Le nombre de permutation possible est de $\frac{5!}{2!\,2!} = 30$ possibilités

Car si on fait un arbre on a n choix, puis $(n-1)$ choix, jusqu'à 1 unique choix. Cependant si on numérote les doublons on remarque que l'on a plusieurs fois une même permutation, ex : $7\,9_1\,9_2\,8\,8$ et $7\,9_2\,9_1\,8\,8$ (et pareil pour les 8). Il faut donc les retirer

ours 5 : dénombrement 2 (5,5 points)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n]\!]$ et E un ensemble tel que $\mathrm{Card}(E) = n$.

1. Donner l'expression de $\binom{n}{k}$. Que compte-t-il dans E ?

$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

2

$\binom{n}{k}$ compte le nombre de parties de E à k éléments

2. Comparer, par le calcul, $\binom{n}{k}$ et $\binom{n}{n-k}$.

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ $\qquad \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-n+k)!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

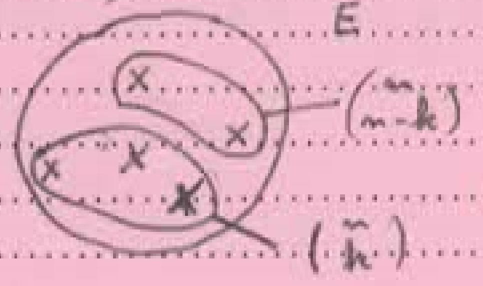
1,5

Donc $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

3. En utilisant un raisonnement de dénombrement, expliquer la formule que vous avez trouvé à la question précédente.

Quand on prend $\binom{n}{k}$ dans un ensemble, il reste $\binom{n}{n-k}$ dans l'ensemble

2



Cours 6 : variable aléatoire (4 points)

Soit X un variable aléatoire prenant les valeurs 0, 1 et 2 telle que $P(X = 0) = \frac{1}{2}$ et $P(X = 1) = \frac{1}{3}$.

1. Calculer $P(X = 2)$.

$P(\Omega) = 1$ Sachant que $P(X=0) = \frac{1}{2}$ et $P(X=1) = \frac{1}{3}$
alors $P(X=2) = \frac{1}{6}$

0,5

2. Calculer l'espérance de X. Vous rappellerez avant la formule.

$E(X) = \sum_{i=0}^{n} x_i \, P(X = x_i)$

$= 0 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{6}$

1,5

$= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

3. Donner deux formules permettant de calculer la variance de X.

1 $\mathrm{Var}(X) = E((X - E(X))^2) = \sum_{i=0}^{n} (x_i - E(X))^2 P(X = x_i)$

$= E(X^2) - (E(X))^2$