Contrôle de cours 1 (1 heure)

Nom : Prénom : Classe :

N.B. : Le barème est sur 20. Il y a en tout quatre questions de cours.

---

1 Polynômes

Cours 1 : divisibilité et division euclidienne (3 points)

Soit $(E, F) \in (\mathbb{R}[X])^2$. On suppose de plus que E n'est pas le polynôme nul.

1. Donner la définition mathématique de $E \mid F$ ainsi qu'un exemple avec $E = 2X - 1$ et F de degré 2.

   ....
   ....
   ....

2. (a) Énoncer soigneusement le théorème de la division euclidienne de F par E.

   ....
   ....

   (b) Trouver le quotient et le reste de la division euclidienne de $F = X^3 - 3X^2 + 5X - 7$ par $E = X - 1$.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

Cours 2 : racines (6 points)

Les questions sont indépendantes.

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré strictement supérieur à 3. Mettre les symboles $\Longrightarrow$, $\Longleftarrow$ ou $\Longleftrightarrow$ à la place des pointillés.

   $a)$ 1 racine de $P \cdots\cdots (X-1) \mid P$. b) $(X-1)^2 \mid P \cdots\cdots P(1) = 0$ c) $P(0) = 0 \cdots\cdots (X^2 - X) \mid P$

2. Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$ telle que $P(a) = P'(a) = P''(a) = 0$ et $P^{(3)}(a) \neq 0$. Quel est l'ordre exact de multiplicité de la racine a ? À quoi cet énoncé est-il équivalent en termes de divisibilité ? Traduire ensuite à l'aide de quantificateurs ce que vous avez écrit.

   ....
   ....
   ....
   ....

3. Donner un exemple d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, de degré 6 qui admet -1 comme racine d'ordre de multiplicité exactement 3 et tel que $P(0) = P'(0) = 0$. On ne vous demande pas de justifier.

   ....

4. Soit $P(X) = X^3(X+2)^2(X^2 - X - 6)(X^2 + X + 1)$.
   (a) Donner le degré de P en expliquant brièvement comment vous l'avez obtenu.

   ....

   (b) Écrire P comme produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ (justifier brièvement). Donner ensuite toutes les racines réelles de P.

   ....
   ....
   ....
   ....

2 Équations différentielles

Cours 3 (7 points)

Soit l'équation différentielle (E_0) $a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$ où a et b sont deux fonctions définies et continues sur $\mathbb{R}$. On suppose de plus que la fonction a ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
On note S_0 l'ensemble de toutes les solutions de (E_0).
Un professeur demande à un élève d'expliciter précisément l'ensemble S_0 au tableau. L'élève note alors :

$$S_0 = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & ke^{-F(t)} \end{array}, k \in \mathbb{R} \right\}.$$ Cette égalité est notée $(\star)$ par la suite.

1. Le professeur demande à l'élève d'être plus précis et d'écrire F en fonction de a et de b. Qu'écrit l'élève ? Vous donnerez aussi F' en fonction de a et de b.

   ....

2. Nous cherchons à présent à démontrer ce théorème rigoureusement.
   (a) Soit $y_0 \in S_0$ une solution de (E_0).
   On introduit la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$: $z : t \longmapsto y_0(t)e^{F(t)}$. Calculer la dérivée de z sur $\mathbb{R}$. En déduire que z est une fonction constante et conclure sur la forme de y_0.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

(b) Quelle inclusion de l'égalité ($\star$) venez-vous de démontrer ?

....
....

(c) Montrer l'autre inclusion de l'égalité ($\star$).

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

3. Résoudre (E_0) $(t^4+1)y' + 2t^3y = 0$ dans $\mathbb{R}$.

....
....
....
....
....
....
....
....

3 Développements limités

Cours 4 (4 points)

Donner les développements limités au voisinage de 0 à l'ordre 3 de

1. $f(x) = e^x$

....

2. $g(x) = \cos(x)$

....

3. $h(x) = \sin(x)$

....

4. $i(x) = \ln(1+x)$

....