

Contrôle TD 2

Nom :

Prénom :

Classe :

Question de cours

Soient E et F deux \mathbb{R} -ev, et $\varphi \in L(E, F)$ une application linéaire de E dans F .

1. Donner la définition mathématique précise de $\text{Ker } \varphi$ et $\text{Im } \varphi$.

2. A quelles conditions sur $\text{Ker } \varphi$ et $\text{Im } \varphi$, φ est-elle injective? φ est-elle surjective?

3. Dans cette question E et F sont de dimensions finies : $\dim E = 5$ et $\dim F = 3$.

Parmi les deux affirmations suivantes l'une est impossible.

Déterminer laquelle et démontrer votre réponse à l'aide du théorème du rang dont vous rappellerez l'énoncé.

- (a) φ est injective.
- (b) φ est surjective.

Exercice 1

Soit g l'application linéaire définie par $g : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto (2x + y - z, z - 2x - y, z - 2x - y) \end{cases}$

1. Déterminer le noyau de g et sa dimension en justifiant soigneusement votre réponse.

2. g est-elle une projection ?

Exercice 2

Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto 2X^2P'' - P \end{cases}$ Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.